

*МИРОНЕНКО С. О.***ДОСЛІДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФОРМИ ЗУБІВ НЕЕВОЛЬВЕНТНИХ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ**

У статті обґрунтовано актуальність дослідження зубчастих передач зі складним неевольвентним профілем бічних поверхонь зубів, які в ряді областей застосування мають переваги перед евольвентними зубчастими передачами і позбавлені деяких їх недоліків, пов'язаних з якісними показниками. Показано, що для отримання сполучених поверхонь зубів двох неевольвентних зубчастих коліс можуть бути використані дві інструментальні рейки з профілями бічних поверхонь зубів, зворотними по відношенню один до одного. Як нелінійний профіль бічної поверхні зуба інструментальної рейки розглядається деяка ділянка однієї з модельованих плоских кінематичних кривих. Дано опис програми, яка дозволяє розраховувати геометричні характеристики формоутворених профілів коліс зубчастої пари, візуалізувати процес формоутворення, а також визначати якісні показники зубчастого зачеплення. Тим самим створено передумови для вибору з отриманого в результаті геометричного моделювання поля кривих таких профілів зубів інструментів, які б забезпечували найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс і необхідні якісні показники зубчастого зачеплення. Представлені результати дослідження коефіцієнта форми зубів зубчастої передачі при виборі форми профілів зубів. Проведено серії чисельних експериментів для зубчастих зачеплень, утворених парами інструментальних рейок з різними профілями бічних поверхонь зубів – прямолінійними, опуклим і увігнутим, а також увігнуто-опуклими. Показано, що неевольвентні зубчасті зачеплення можуть мати менші коефіцієнти форми зубів в порівнянні з евольвентними зачепленнями. Найбільш доцільним представляється варіант рейок з увігнутим і увігнуто-опуклим профілями зубів, що забезпечує найкращі значення якісних показників зачеплення.

**Ключові слова:** неевольвентне зубчасте зачеплення, формоутворення зубчастих коліс, поверхні, що сполучаються, інструментальна рейка, профіль зуба, плоска кінематична крива, якісні показники зубчастого зачеплення.

**MIRONENKO S.****RESEARCH OF TOOTH SHAPE COEFFICIENTS OF NON-EVOLVENT GEARS**

The article substantiates the relevance of the study of gears with a complex non-evolvent profile of the side surfaces of the teeth, which in some applications have advantages over evolvent gears and are devoid of some of their drawbacks associated with quality indicators. It is shown that to obtain the mating surfaces of the teeth of two non-evolvent gears, two tool rails can be used with the profiles of the side surfaces of the teeth opposite to each other. As a nonlinear profile of the tooth lateral surface of the tool rail, some part of one of the simulated flat kinematic curves is considered. A description of the program is given, which allows you to calculate the geometric characteristics of the shaped profiles of the gear pair wheels, visualize the shaping process, and also determine the quality indicators of the gearing. Thus, the prerequisites were created for choosing from the resulting geometric modeling of the curve field of such tooth profiles of the tools, which would provide the most rational combination of the tooth profiles of the gears processed by them and the required quality parameters of the gear teeth. The results of the study of the tooth shape coefficients between the teeth of a gear when choosing the shape of the tooth profiles are presented. A series of numerical experiments for gearing, formed by pairs of tool rails with different profiles of the side surfaces of the teeth – straight, convex and concave, as well as concave-convex – were performed. It is shown that non-evolvent gearing can have smaller tooth shape coefficients compared to evolvent gearing. The most preferable is the variant of the rails with concave and concave-convex tooth profiles, which provides the best values of quality indicators of the engagement.

**Keywords:** non-evolvent gearing, shaping of gears, mating surfaces, tool rail, tooth profile, flat kinematic curve, quality indicators of gearing.

**Вступ.**

Зубчасті передачі, що використовуються у сучасному машинобудуванні, повинні забезпечувати передачу великих обертаючих моментів, бути точними та швидкохідними, плавними та безшумними. Разом з тим зубчасті зачеплення повинні характеризуватися високою працездатністю: надійністю, довговічністю, безвідмовністю, ремонтпридатністю.

Найважливіші експлуатаційні властивості зубчастих передач (плавність зачеплення, міцність та знос зубів коліс) оцінюються за низкою якісних показників працездатності зачеплення. Коефіцієнт перекриття дозволяє оцінити безперервність зубчастого зачеплення, плавність та безшумність роботи передачі. Коефіцієнт тиску між зубами характеризує силову взаємодію зубчастих коліс, їхню контактну міцність. Коефіцієнт ковзання зубів враховує вплив геометричних та кінематичних факторів на інтенсивність зносу профілів зубів, є показником їхньої зносостійкості. Коефіцієнт форми зуба характеризує згинальну міцність зубів.

Зубчасті передачі з евольвентним профілем бічних поверхонь зубів є найбільш поширеними механічними передачами, які застосовуються в машинобудуванні. Передачі, складені з таких коліс, відрізняються рядом переваг, однак мають при цьому і цілий ряд недоліків, що пов'язані з їх експлуатаційними властивостями. Тому актуальною задачею є дослідження зубчастих передач зі складним неевольвентним профілем бічних поверхонь зубів, які в ряді областей застосування при вдалому виборі поєднання профілів зубів мають переваги перед евольвентними передачами за якісними показниками.

**Мета дослідження.**

Дослідження спрямовані на комплексний аналіз якісних показників неевольвентних зубчастих зачеплень, зокрема розробку математичної моделі розрахунку коефіцієнтів форми зубів зубчастої передачі, з метою вибору з отриманого в результаті геометричного моделювання поля кривих таких профілів зубів інструментів, які б забезпечували найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс і необхідні якісні показники зубчастого зачеплення.

### 3. Викладення основного матеріалу та результати.

У ряді попередніх наукових досліджень було розроблено геометричну модель кінематичної кривої як потенційного профілю бічної поверхні зуба зуборізного інструменту та математичну модель розрахунку профілю зуба зуборізного інструменту для обробки невольвентних зубчастих коліс [1, 2, 3, 4]; розроблено методику геометричного аналізу процесу формоутворення поверхонь обкатними зуборізними інструментами та методику отримання профілів сполучених поверхонь зубів невольвентних зубчастих коліс як огинаючих поверхонь зубів інструментів [2, 3, 4, 5]; розроблено математичну модель розрахунку профілю огинаючої поверхні зуба зубчастого колеса, оброблюваного за методом обкатки, та математичну модель розрахунку коефіцієнтів тиску між зубами та перекриття зубчастої передачі з метою спрямованого формування заданих параметрів її якісних показників [2, 5, 6, 7].

У продовженні та розвитку цих досліджень для подальшої можливості комплексного аналізу якісних показників невольвентних зубчастих зачеплень вирішується задача математичного моделювання розрахунку коефіцієнтів форми зубів зубчастої передачі, складеної з невольвентних зубчастих коліс.

Ведуча та ведена ланки зубчастих механізмів утворюють у місці контакту вищу кінематичну пару. Для забезпечення передачі руху від ведучої ланки до веденої в цій парі повинні виконуватись геометричні та кінематичні умови [8-10]. Відповідно до геометричної умови, у точці контакту профілів поверхні ланок повинні мати загальну нормаль. У вищих парах елементами торкання ланок є лінії або точки, тому питомий тиск у них дуже великий, що викликає підвищений знос ланок. Сили, що діють на профілі поверхонь ланок у точці їх контакту, рівні за модулем, силова взаємодія спрямована по загальній нормалі до профілів.

Розглянемо плоску задачу торкання поверхонь зубчастих коліс 1 і 2. Поверхні зубчастих коліс зв'яжемо з реперами  $x_1y_1z_1$  і  $x_2y_2z_2$ . Вихідне положення реперів, параметри рухів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , параметри їх швидкостей  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , а також центроїди коліс представлено на рис. 1. У нормальному перерізі центроїди коліс є окружностями з радіусами  $r_1$  і  $r_2$ . На рисунку показано два послідовні моменти торкання профілів зубів у точках  $P$  і  $M$ . Ці точки лежать на лінії зачеплення, точка  $P$  є миттєвим полюсом зачеплення. У випадку евольвентного зачеплення профілів зубів лінія зачеплення є прямою. У загальному випадку, коли профілі мають довільну невольвентну форму, лінія зачеплення є кривою, що проходить через полюс зачеплення. Точка торкання профілів  $M$  відповідає крайній точці лінії зачеплення та розташована на вершині зуба зубчастого колеса 1.

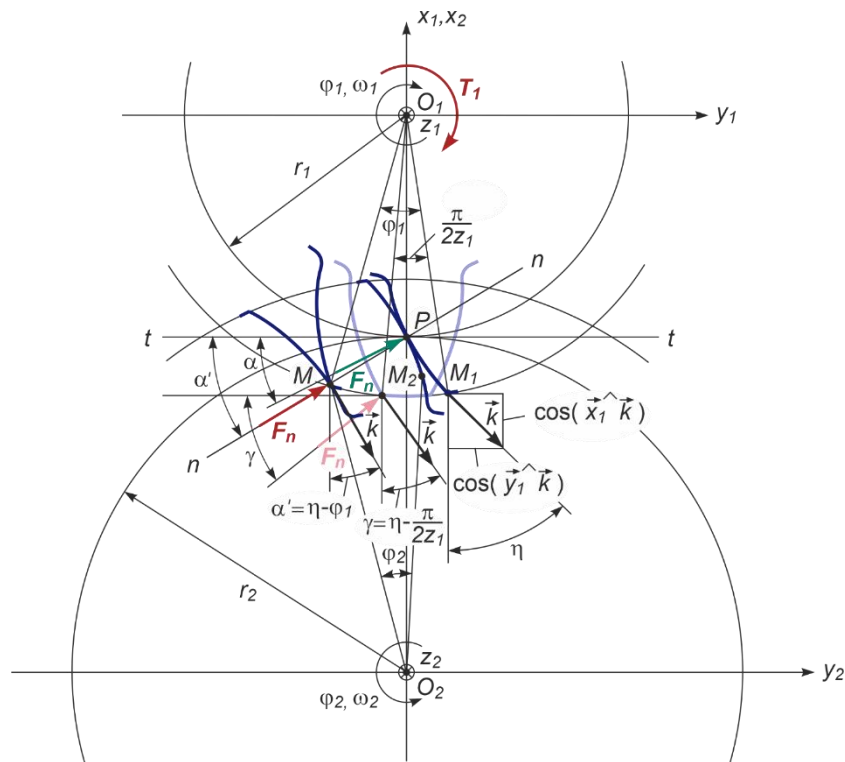


Рис. 1 - До розрахунку коефіцієнтів форми зубів зубчастої передачі

Лінія  $t-t$  – загальна дотична до центроїд у точці  $P$ . Пряма  $n-n$ , що проходить через полюс зачеплення, є загальною нормаллю, а пряма  $k-k$  – загальною дотичною до профілів у точці торкання  $M$ .

Профільна нормаль  $n-n$  та дотична до центроїд  $t-t$  утворюють між собою кут  $\alpha'$ . У загальному випадку, коли профілі зубів неевольвентні, значення кута  $\alpha'$  різні для різних точок торкання профілів і не збігаються зі значенням кута  $\alpha$ , що відповідає торканню профілів у полюсі зачеплення  $P$ .

Вихідне положення профілів відповідає моменту торкання профілів зубів у точці  $P$  (рис. 1). У цей момент точка  $M$ , що належить одночасно профілям зубів двох зубчастих коліс в інший момент торкання, роздвоюється і на профілях зубів позначена точками  $M_1$  і  $M_2$ .

Найбільш небезпечним варіантом руйнування зубчастих коліс є злам зубів, що викликаний напруженнями згину. Розглянемо метод розрахунку зубчастих передач по напруженнях згину, заснований на положеннях опору матеріалів. При розрахунку приймають наступні припущення:

1) зусилля, що діє в зубчастому зачепленні, передається лише однією парою зубів (під час обкатки зубчастих коліс існують зони одно-парного і двох-парного зачеплення зубів, але переважно контактує одна пара зубів, крім того навіть в зоні двох-парного зачеплення внаслідок похибок виготовлення коліс та складання передачі може контактувати лише одна пара зубів; у випадку одно-парного контакту сили, прикладені до зубів коліс, будуть найбільшими і такий режим навантаження є найбільш небезпечним);

2) контакт зубів відбувається у крайній точці лінії зачеплення, тому навантаження прикладається до вершини зуба зубчастого колеса (в цьому випадку плече сили  $i$ , як наслідок, напруження згину будуть максимальними, що робить таке розташування навантаження найбільш небезпечним);

3) сила тертя в зачепленні мало впливає на величину напруження і тому не враховується;

4) зуб зубчастого колеса розглядається як навантажена зосередженою силою защемлена консольна балка прямокутного перерізу, що працює на згин та стиск.

Прикладемо крутний момент  $T_1$  до зубчастого колеса 1 за годинниковою стрілкою (рис. 1). Під дією крутного моменту зубчасте колесо 1 обертається і зуб колеса 1 тисне на зуб колеса 2. Між зубами діє нормальна сила. Контакт зубів і їх силова взаємодія у припущенні відсутності тертя між зубами відбуваються вздовж лінії зачеплення. Нормальна сила  $F_n$ , що діє на зуб колеса 1 з боку зуба колеса 2, спрямована по загальній нормалі до профілів зубів і контакт зубів відбувається в полюсі зачеплення.

У випадку розрахунку зубів на контактну міцність вважається, що нормальна сила  $F_n$  прикладена до точки профілю зуба колеса 1, яка контактує з профілем зуба колеса 2 в полюсі зачеплення  $P$  (на рисунку її дія показана зеленим кольором). Але у випадку розрахунку зубів на згин нормальна сила  $F_n$  прикладається до вершини зуба колеса 1 у точці  $M$  (на рисунку дія сили показана червоним кольором).

Зробимо поворот зображення зуба колеса 1 разом із прикладеною до нього у точці  $M$  силою  $F_n$  навколо центра центроїди колеса  $O_1$  так, щоб вісь симетрії зуба збіглася з лінією, що з'єднає центри центроїд коліс  $O_1$  і  $O_2$  (рис. 1). Це положення зуба будемо вважати вихідним для побудови схеми розрахунку зуба на згин.

Геометрична форма зуба значною мірою визначає його показники як згинальної, так і контактної міцності. Оцінка впливу геометрії зуба на згинальну міцність виконується за допомогою коефіцієнта форми зуба. Цей коефіцієнт визначається через параметри балки параболічного перерізу (балки рівного опору згину), яка вписується в профіль зуба зубчастого колеса таким чином, щоб вершина параболи розташовувалася в точці  $A$  перетину осі зуба і нормалі до профілю зуба у його вершині, а гілки торкалися профілю зуба в точках  $B$  і  $C$  на його основі, які визначають положення небезпечного перерізу зуба на згин (рис. 2), де  $F_n$  – нормальна сила, що діє на зуб;  $s$  – товщина зуба в небезпечному перерізі на основі зуба;  $l$  – висота від вершини параболи до основи зуба (плече згинальної сили).

Схему розрахунку зуба зубчастого колеса на згин представлено на рис. 3. Нормальну силу  $F_n$  перенесемо у напрямку нормалі  $n-n$  в точку, що лежить на осі зуба, і розкладемо на дві складові – окружну силу  $F_t$  і радіальну силу  $F_r$ . Їх можна визначити через нормальну силу  $F_n$  наступним чином:

$$\begin{aligned} F_t &= F_n \cos \gamma; \\ F_r &= F_n \sin \gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\gamma$  – кут прикладання нормальної сили.

Зуб можна розглядати як консольну балку, яка навантажена двома силами  $F_t$  і  $F_r$  на вільному кінці (рис. 3). Під дією сили нормального стиску  $F_r$  консольна балка стискається, згідно з епюрою нормальної сили  $N$  ця сила однакова по висоті балки (тобто по висоті зуба). Сила  $F_t$  згинає балку, згідно з епюрою згинального моменту  $M$  внаслідок збільшення плеча сили момент сили зростає від вільного кінця балки до її закріплення і є максимальним в основі балки (тобто в основі зуба).

Визначимо напруження у небезпечному перерізі в основі зуба. Радіальна сила  $F_r$  викликає напруження стиску в основі зуба, а окружна сила  $F_t$  викликає момент, який створює напруження згину.

Побудуємо епюру напружень стиску в основі зуба. Він є рівномірним вздовж товщини зуба. Напруження стиску дорівнює відношенню стискаючої сили  $F_r$  до площі перерізу в основі зуба  $A$  :

$$\sigma_{cm} = \frac{F_r}{A}. \quad (2)$$

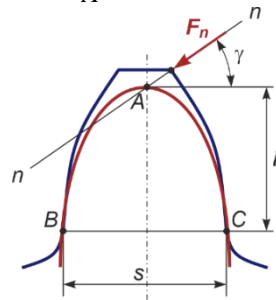


Рис. 2 – Профілі зуба зубчастого колеса та балки рівного опору згин.

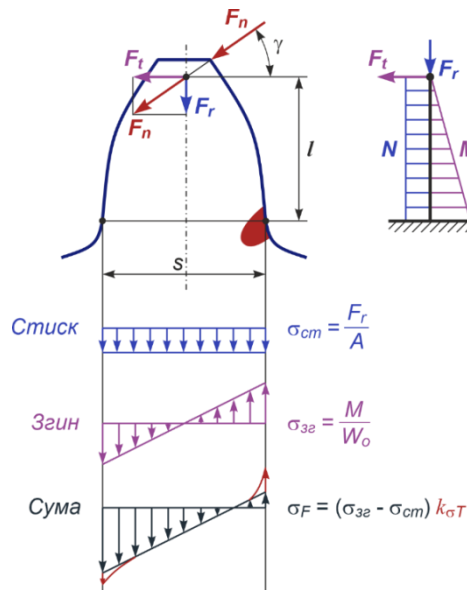


Рис. 3 – Схема розрахунку зуба зубчастого колеса на згин.

Побудуємо епюру напружень згину в основі зуба. Оскільки згинальний момент в даному випадку діє проти годинникової стрілки, у правій відносно осі симетрії частині профілю зуба буде розтяг, у лівій частині буде стиск. Напруження згину дорівнює відношенню згинального моменту у перерізі в основі зуба  $M$  до осьового моменту опору перерізу  $W_o$  :

$$\sigma_{zz} = \frac{M}{W_o}. \quad (3)$$

Сумарні напруження в основі зуба є сумою напружень стиску і напружень згину. Сумарні напруження в основі зуба у лівій стиснутій частині зуба будуть більші, ніж у правій розтягнутій частині (рис. 3), але напруження стиску є набагато безпечнішими з точки зору можливої поломки зуба, ніж напруження розтягу. Втомна тріщина, яка може з'явитися в основі зуба, у правій частині зуба буде розкриватися під дією моменту і призводити до зламу зуба, а в лівій частині буде закриватися. Тому за розрахункові приймають сумарні напруження на правій розтягнутій частині зуба і формула для їх обчислення приймає вигляд:

$$\sigma_F = \sigma_{zz} - \sigma_{cm}. \quad (4)$$

Крім того, в зоні перехідної кривої профілю (галтелі) в ніжці зуба спостерігається концентрація напруження (на рис. 3 зону концентрації напруження виділено червоним кольором). Для врахування цього на епюрі сумарних напружень вказується збільшення рівня напружень у крайніх ділянках епюри. У формулі для сумарних напружень в основі зуба наявність концентрації напруження враховується за допомогою коефіцієнта  $k_{\sigma T}$ , який називається теоретичним коефіцієнтом концентрації напруження:

$$\sigma_F = (\sigma_{zz} - \sigma_{cm}) k_{\sigma T}. \quad (5)$$

В основі зуба лежить прямокутник шириною  $s$  та довжиною  $b$  (ширину зуба позначимо як  $b$ ) (рис. 4). В ідеалі, якщо б зуб був ідеальної форми, вали не деформувалися, а підшипники були абсолютно жорсткими, нормальна рівнодійна сила  $F_n$  (реакція взаємодії зубів) була би прикладена посередині зуба (рис. 4, а), але в дійсності внаслідок деформацій валів та похибок виготовлення зубчатого зачеплення рівнодійна сила буде зміщуватися на край зуба (рис. 4, б), злам зуба буде відбуватись не в його основі, а з одного боку зуба по деякій похилій площині, тобто по площині з мінімальним моментом опору.

З урахуванням того, що площа прямокутного перерізу в основі зуба  $A = bs$ , згинальний момент у перерізі  $M = F_l l$ , а осьовий момент опору перерізу  $W_o = \frac{bs^2}{6}$ , використовуючи вирази (1), перепишемо формули (2) і (3) відповідно до ідеалізованої схеми рівномірного розподілу навантаження наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_{cm} &= \frac{F_r}{bs} = \frac{F_n \sin \gamma}{bs}; \\ \sigma_{ze} &= \frac{6F_l l}{bs^2} = \frac{6F_n l \cos \gamma}{bs^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

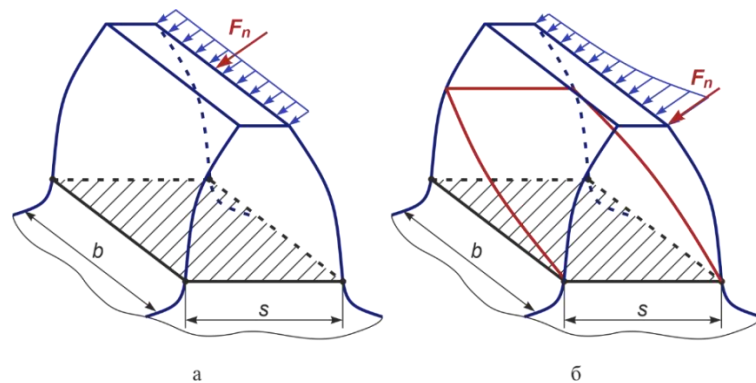


Рис. 4 – Розподіл навантаження, що відповідає напруженню згину, по ширині зуба зубчатого колеса: а – ідеалізована схема розподілу навантаження; б – реальна схема розподілу навантаження

Нерівномірність розподілу навантаження по ширині зуба і відповідно збільшення напружень в одній частині зуба враховується коефіцієнтом  $K_{F\beta}$ . Крім того, в процесі роботи зубчастих передач внаслідок зазорів, вібрацій і неточностей виготовлення один зуб може входити в зачеплення з іншим з ударом, внаслідок чого напруження динамічно збільшуються. Удар зубів при вході в зачеплення враховується динамічним коефіцієнтом  $K_{Fv}$ .

З урахуванням цього запишемо формули для обчислення напружень стиску і згину відповідно до реальної схеми нерівномірного розподілу навантаження:

$$\begin{aligned} \sigma_{cm} &= \frac{F_n \sin \gamma}{bs} K_{F\beta} K_{Fv}; \\ \sigma_{ze} &= \frac{6F_n l \cos \gamma}{bs^2} K_{F\beta} K_{Fv}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тоді формула (5) для обчислення сумарних напружень в основі зуба прийме вигляд:

$$\sigma_F = \left( \frac{6F_n l \cos \gamma}{bs^2} - \frac{F_n \sin \gamma}{bs} \right) k_{\sigma T} K_{F\beta} K_{Fv}. \quad (8)$$

Оскільки геометричні параметри зуба пропорційні модулю зачеплення  $m$ , виразимо параметри профілю зуба  $l$  і  $s$  у частках модуля:

$$l = l'm; \quad s = s'm, \quad (9)$$

де  $l'$  і  $s'$  – коефіцієнти, що враховують форму зуба.

В такому випадку

$$\sigma_F = \frac{F_n}{b} \left( \frac{6l'm \cos \gamma}{(s'm)^2} - \frac{\sin \gamma}{s'm} \right) k_{\sigma T} K_{F\beta} K_{Fv}. \quad (10)$$

Відповідно до виразу (1) нормальна сила  $F_n$ , що прикладена до вершини зуба, виражається через окружну силу  $F_t$  наступним чином:

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \gamma}. \quad (11)$$

Замінімо цю силу нормальною силою  $F_n$ , що прикладена до точки профілю зуба, яка контактує з профілем зуба іншого колеса в полюсі зачеплення  $P$  (рис. 1), і яку можна зв'язати з силовими параметрами передачі:

$$F_n = \frac{F_{tP}}{\cos \alpha}, \quad (12)$$

де  $F_{tP}$  – окружна складова нормальної сили, що зв'язана з крутним моментом  $T_1$  залежністю:

$$F_{tP} = \frac{T_1}{r_1} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_1}{mz_1}. \quad (13)$$

В результаті отримаємо остаточну формулу для визначення сумарних напружень в основі зуба:

$$\sigma_F = \frac{F_{tP}}{bm \cos \alpha} \left( \frac{6l' \cos \gamma}{s'^2} - \frac{\sin \gamma}{s'} \right) k_{\sigma T} K_{F\beta} K_{Fv}. \quad (14)$$

При спрощеному обчисленні напружень в основі зуба стискаюча дія радіальної складової нормальної сили  $F_r$  мало впливає на величину напруження і тому може не враховуватися, тобто в формулі (14) складова, що віднімається у дужках, може бути опущена.

Значення коефіцієнтів  $k_{\sigma T}$ ,  $K_{F\beta}$  і  $K_{Fv}$  вибираються з відповідних таблиць або графіків.

У формулі (14) параметр  $F_{tP}$  залежать тільки від силових характеристик передачі,  $b$  і  $m$  – відомі параметри з виготовлення зубчастого колеса, коефіцієнти  $K_{F\beta}$  і  $K_{Fv}$  залежать від деформації і швидкості обертання валів. Інші параметри, які визначаються тільки геометрією зуба зубчастого колеса, виділяються і позначаються як  $Y_F$  – коефіцієнт форми зуба:

$$Y_F = \frac{1}{\cos \alpha} \left( \frac{6l' \cos \gamma}{s'^2} - \frac{\sin \gamma}{s'} \right) k_{\sigma T}. \quad (15)$$

Таким чином, умова згинальної міцності набуває наступного вигляду і є функцією окружної сили і коефіцієнтів, які її коректують:

$$\sigma_F = \frac{F_{tP} K_{F\beta} K_{Fv}}{bm} Y_F \leq [\sigma]_F, \quad (16)$$

де  $[\sigma]_F$  – допустиме напруження згину.

Коефіцієнт форми зуба  $Y_F$  в першу чергу залежить від кількості зубів зубчастого колеса, що впливає на форму зуба. При збільшенні кількості зубів зменшується кривизна ніжки зуба і збільшується її ширина  $s$ , це призводить до збільшення осьового моменту опору перерізу в основі зуба, що залежить від квадрату ширини зуба, і зменшенню коефіцієнта форми зуба. Тому більш міцним на згин буде зуб з більшою кількістю зубів.

Визначимо фізичний зміст коефіцієнта форми зуба. Нехай окружна сила  $F_{tP} = 1$  Н, модуль зуба  $m = 1$  мм, ширина зуба  $s = 1$  мм, передача працює повільно, плавно і є ідеально недеформованою, тому нема ніякого збільшення напружень по ширині зуба і  $K_{F\beta} K_{Fv} = 1$ . В такому випадку  $\sigma_F = Y_F$  (МПа).

Таким чином, фізичний зміст коефіцієнта форми зуба – це напруження в одиничному зубі при одиничному навантаженні. Збільшення коефіцієнта форми зуба із зменшенням кількості зубів свідчить про те, що збільшуються і напруження в зубі.

При обчисленні коефіцієнта форми зуба  $Y_F$  згідно з формулою (15) для знаходження значень параметрів  $\gamma$  і  $\alpha$  скористасмося такими міркуваннями. Як було зазначено вище, вихідне положення профілів відповідає моменту торкання профілів зубів у точці  $P$  (рис. 1). У цей момент точка  $M$ , що належить одночасно профілям зубів двох зубчастих коліс в інший момент торкання, на профілях зубів позначена точками  $M_1$  і  $M_2$ .

У вихідному положенні в точках профілю зубчастого колеса 1 відомі їх координати та напрямки векторів дотичних  $\vec{k}$  до профілю, що визначаються їх напрямними косинусами або кутом нахилу дотичної до профілю  $\eta$ . На рис. 1 показані їх позначення для точки  $M_1$ .

Момент торкання профілів у точці  $M$ , коли точки  $M_1$  і  $M_2$  на профілях зливаються, відповідає повороту зубчастих коліс 1 і 2 на кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  відповідно. До відомої вихідної інформації також відносяться значення кутів торкання профілів  $\phi_2$  для різних точок [2]. Параметри рухів пов'язані між собою відповідно до залежностей:

$$\varphi_1 = i \cdot \varphi_2, \quad \omega_1 = i \cdot \omega_2, \quad (17)$$

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (18)$$

Із рис. 1 видно, що у момент торкання профілів у точці  $M$  значення кута  $\alpha'$ , який відповідає напрямку нормальної сили  $F_n$ , можна визначити як різницю кута нахилу дотичної до профілю  $\eta$  і кута повороту  $\varphi_1$  зубчастого колеса 1 згідно зі співвідношенням:

$$\alpha' = \eta - \varphi_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}. \quad (19)$$

Після повороту зображення зуба зубчастого колеса 1 разом із прикладеною до нього у точці  $M$  силою навколо точки  $O_1$  до положення, яке є вихідним для побудови схеми розрахунку зуба на згин, напрямку нормальної сили  $F_n$  відповідає кут  $\gamma$ . Це положення можна отримати поворотом зображення зуба відносно вихідного положення профілів на кут  $\frac{\pi}{2z_1}$ , що є чвертю від кутового кроку зубчастого колеса  $\tau = \frac{2\pi}{z_1}$ . Таким чином,

$$\gamma = \eta - \frac{\pi}{2z_1}, \quad (20)$$

де  $\eta$  – кут нахилу дотичної до профілю у вихідному положенні профілів для точки  $M_1$ .

Кут  $\alpha$  відповідає напрямку нормальної сили  $F_n$ , що прикладена до точки профілю зуба колеса 1, яка контактує з профілем зуба колеса 2 в полюсі зачеплення  $P$ . Оскільки в момент торкання профілів зубів у точці  $P$  кути повороту зубчастих коліс  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  дорівнюють нулю, згідно зі співвідношенням (19) отримуємо вираз:

$$\alpha = \eta, \quad (21)$$

де  $\eta$  – кут нахилу дотичної до профілю у вихідному положенні профілів для точки  $P$ .

Значення коефіцієнтів  $l'$  і  $s'$  знайдемо відповідно до залежностей (9):

$$l' = \frac{l}{m}; \quad s' = \frac{s}{m}. \quad (22)$$

Обчисливши значення  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $l'$  і  $s'$  за формулами (20)-(22), а також вибравши значення теоретичного коефіцієнта концентрації напруження  $k_{\sigma T}$  з таблиці, за формулою (15) можна визначити значення коефіцієнта форми зуба для зубчастого колеса 1. Значення коефіцієнта форми зуба для зубчастого колеса 2 визначається аналогічним чином.

Було розроблено систему взаємопов'язаних програмних модулів на мові програмування Delphi, що дозволяє проводити комплексний аналіз якісних показників неевольвентних зубчастих передач:

- програмний модуль «Геометричне моделювання кінематичних кривих (LinesModel)»;
- програмний модуль «Дослідження якісних показників неевольвентних зубчастих зачеплень (Gears)».

Комп'ютерну програму LinesModel призначено для геометричного моделювання плоских кінематичних кривих як потенційних профілів бічних поверхонь зубів зуборізних інструментів для виготовлення неевольвентних зубчастих передач. При розробці програми застосовано математичний апарат багатопараметричних відображень простору, узагальнену уніфіковану структуру відображення для робочих і верстатних зубчастих зачеплень [11, 12]. Кінематична крива розглядається як безперервна траєкторія складного руху точки у триланковому зубчастому зачепленні.

За допомогою програми створено передумови для вибору з отриманого в результаті геометричного моделювання поля кінематичних кривих таких профілів зубів інструментів, які б забезпечували найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс і необхідні якісні показники зубчастого зачеплення [13].

Комп'ютерну програму Gears призначено для геометричного аналізу процесу формоутворення поверхонь зубів обкатними зуборізними інструментами за допомогою комп'ютерної графіки, розрахунку та аналізу якісних показників зубчастих зачеплень, утворених рейками з різним профілем бічних поверхонь зубів, вибору форми профілів зубів інструментів, що забезпечують найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс [14]. Програму розроблено на базі узагальненої математичної моделі формування профілів ріжучої частини інструментів для формоутворення неевольвентних зубчастих передач на основі кінематичного аналізу їх руху методами теорії відображень простору [11, 6].

У продовженні попередніх досліджень коефіцієнтів перекриття зубчастого зачеплення та тиску між зубами зубчастої передачі за допомогою програми було проведено серії чисельних експериментів для розрахунку та аналізу коефіцієнтів форми зубів зубчастих зачеплень, утворених рейками з різним профілем бічних поверхонь зубів.

На рис. 5 представлено порівняльні графіки зміни значень коефіцієнтів форми зуба  $Y_F$  при  $k_{\sigma T} = 1$  в залежності від кількості зубів  $z$  зубчастих коліс з  $m = 5$  мм, утворених інструментальними рейками з

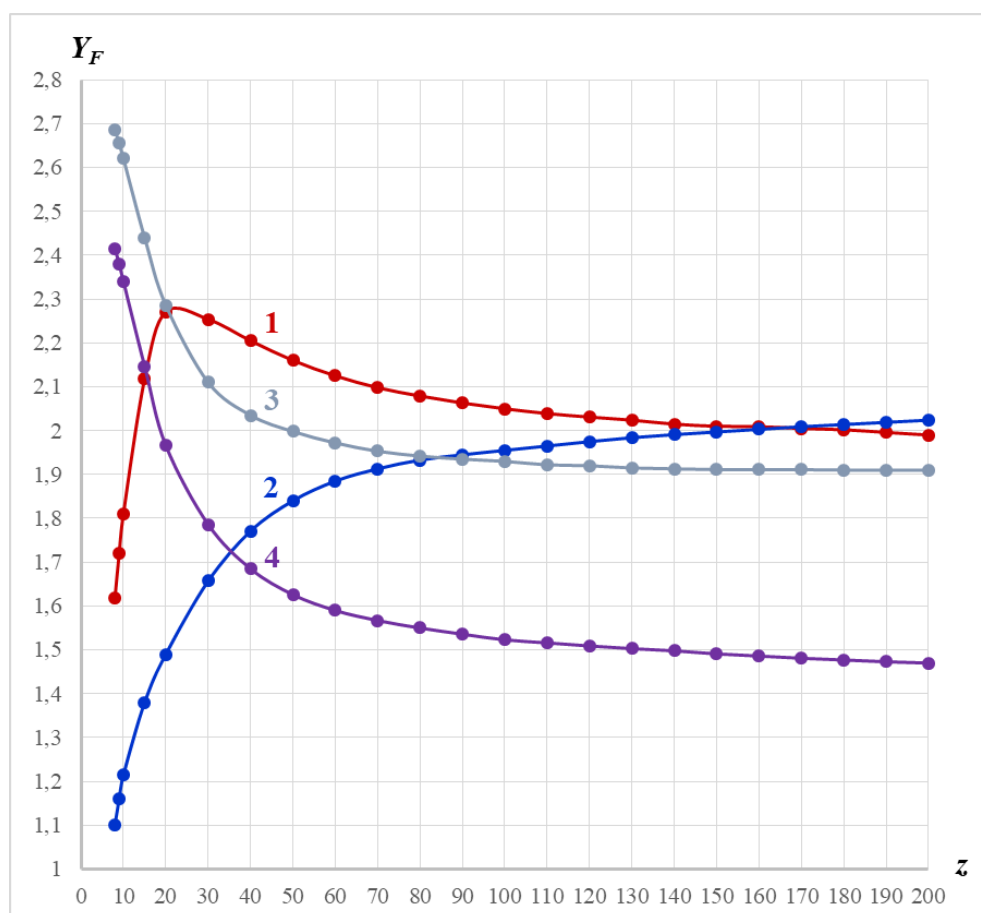
прямолинійним, увігнутим, опуклим та увігнуто-опуклим профілями зубів. Наведено середні у діапазонах  $z = 8-200$  і  $z = 20-100$  значення коефіцієнтів форми зуба  $Y_{F\text{ серед}}$  для зубчастих коліс, утворених рейками з різними типами профілів зубів.

Зменшення значень коефіцієнтів форми зуба в області невеликих значень кількості зубів  $z$  для евольвентних зубчастих коліс, утворених рейкою з прямолинійним профілем зубів, пояснюється наявністю підрізів на ніжках зубів зубчастих коліс і, як наслідок, зменшенням робочої висоти зубів.

У діапазоні  $z = 8-200$  для зубчастих коліс, утворених рейками з увігнутим і з увігнуто-опуклим профілями зубів, коефіцієнти форми зуба менші в середньому в 1.1 і в 1.2 рази, ніж для евольвентних зубчастих коліс, утворених рейкою з прямолинійним профілем зубів. Зубчасті колеса, утворені рейкою з опуклим профілем зубів, мають середні коефіцієнти форми зуба, що є сумірними з середніми коефіцієнтами форми зуба для евольвентних зубчастих коліс.

У діапазоні  $z = 20-100$  для зубчастих коліс, утворених рейками з увігнутим, з опуклим і з увігнуто-опуклим профілями зубів, коефіцієнти форми зуба менші в середньому в 1.2, в 1.1 і в 1.3 рази, ніж для зубчастих коліс, утворених рейкою з прямолинійним профілем зубів, тобто всі варіанти неевольвентних зубчастих коліс показують кращі результати.

Найбільш доцільними представляються варіанти зубчастих коліс, утворених рейками з увігнутим та з увігнуто-опуклим профілями зубів, що забезпечують найкращі значення коефіцієнтів форми зуба у порівнянні з евольвентними зубчастими колесами і внаслідок цього є більш міцними на згин.



Середні значення коефіцієнтів форми зуба для зубчастих коліс,  
 утворених рейками з різними типами профілів зубів  
 для  $z = 8-200$ : 1 –  $Y_{F\text{ серед}} = 2,032$ ; 2 –  $Y_{F\text{ серед}} = 1,786$ ; 3 –  $Y_{F\text{ серед}} = 2,076$ ; 4 –  $Y_{F\text{ серед}} = 1,701$ ;  
 для  $z = 20-100$ : 1 –  $Y_{F\text{ серед}} = 2,147$ ; 2 –  $Y_{F\text{ серед}} = 1,807$ ; 3 –  $Y_{F\text{ серед}} = 2,023$ ; 4 –  $Y_{F\text{ серед}} = 1,650$ .

Рис. 5 – Графіки зміни значень коефіцієнтів форми зуба при  $k_{\sigma T} = 1$  в залежності від кількості зубів зубчастих коліс з  $m = 5$  мм, утворених: 1 – рейкою з прямолинійним профілем зубів; 2 – рейкою з увігнутим профілем зубів; 3 – рейкою з опуклим профілем зубів; 4 – рейкою з увігнуто-опуклим профілем зубів

**Висновки.**

Для комплексного аналізу якісних показників неевольвентних зубчастих зачеплень розроблено математичну модель розрахунку коефіцієнтів форми зубів зубчастої передачі. Виконано аналіз коефіцієнтів форми зубів зубчастих зачеплень, утворених рейками з різним профілем бічних поверхонь зубів. Результати чисельних експериментів показують, що неевольвентні зубчасті зачеплення можуть мати менші коефіцієнти форми зубів у порівнянні з евольвентними.

Створено передумови для вибору отриманого в результаті геометричного моделювання поля кривих таких профілів зубів інструментів, які забезпечували б найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс і необхідні якісні показники зубчастого зачеплення.

**Список літератури:**

1. Tatyana Tretyak, Alexander Mironenko, Yury Gutsalenko, Natalia Krukova, Sergey Mironenko. Structural approach to the mathematical description and computer visualization of plane kinematic curves for the display of gears. *Fiabilitate si Durabilitate - Fiability & Durability*, No 1 / 2018, Editura «Academica Brâncuși», Târgu Jiu. Pp. 7-11.
2. Tretyak Tatyana, Shelkovo Alexander, Gutsalenko Yury, Mironenko Alexander, Zubkova Nina, Mironenko Sergey, Structural approach to development of gearing with cutting of gears-links by rolling cutters of indirect linear side profile of teeth. *POLISH SCIENCE JOURNAL (ISSUE 5(14), 2019)*. Warsaw: Sp. z o. o. «iScience», 2019. Part 2. 165 p. P. 135-147.
3. Третьак Т.Е., Шелковой А.Н., Гуцаленко Ю.Г., Мironenko А.Л., Мironenko С.А. Математическое моделирование профиля зуборезного обкаточного инструмента для обработки неэвольвентных зубчатых колес. «Вісник Донбаської державної машинобудівної академії»: Зб. наук. праць. Краматорськ: ДДМА, 2019. № 3 (47). 230 с. С. 121-129.
4. Tatyana Tretyak, Yury Gutsalenko, Alexander Shelkovo, Alexander Mironenko, Sergey Mironenko. Mathematical modeling of the profile of a gear cutting rolling tool for machining of non-involute gear wheels. *Fiabilitate si Durabilitate - Fiability & Durability*, No 2 / 2019, Editura «Academica Brâncuși», Târgu Jiu. P. 5-11.
5. Третьак Т.Е., Мironenko А.Л., Мironenko С.А. Исследование качественных показателей зубчатых передач со сложным неэвольвентным профилем боковых поверхностей зубьев. Вісник Національного Технічного Університету «Харківський Політехнічний Інститут». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ». 2020. № 2. 85 с. С. 85-90.
6. Третьак Т.Е., Шелковой А.Н., Гуцаленко Ю.Г., Мironenko С.А. Анализ качественных показателей неэвольвентных зубчатых передач. Резание и инструмент в технологических системах: Междунар. науч.-техн. сб. Харьков: НТУ «ХПІ», 2019. Вып. 90. 188 с. С. 72-84.
7. Tretyak T., Gutsalenko Y., Mironenko A., Mironenko S. Research of quality indicators of non-evolvent gears. *Magyar Tudományos Journal (Budapest, Hungary)*. № 48 (2020). 52 p. P. 47-51.
8. Теорія механізмів і машин. Курс лекцій для студентів спеціальності „Динаміка і міцність машин”/ Автор: к.т.н., доц. О.П. Захочайко. – К.: НТУУ "КПІ", 2010. –243 с.
9. Заблонский К.И., Белоконев И.М., Шекин Б.М. Теория механизмов и машин: Учебник. К.: Вища школа, 1989. 376 с.
10. Детали машин, теория механизмов и основы взаимозаминности : курс лекций для студентов технических специальностей / С. Г. Карнаух, М. Г. Таровик. – Краматорськ : ДДМА, 2018. – 252 с. ISBN 978-966-379-843-1
11. Перепелица Б.А. Отображение аффинного пространства в теории формообразования поверхности резанием. Харьков: Вища шк., 1981. 152 с.
12. Кривошея А.В. Структура многопараметрического отображения, обобщающая станочные и рабочие зубчатые зацепления / А.В. Кривошея // Высокие технологии в машиностроении: моделирование, оптимизация, диагностика: Тезисы докл. Харьков: ХГПУ, 1995. С. 71.
13. Комп'ютерна програма «Геометрическое моделирование кинематических кривых» («LinesModel») / Третьак Т.Е., Шелковий О.М., Мironenko О.Л., Мironenko С.О. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 118397 від 24 квітня 2023 р.
14. Комп'ютерна програма «Исследование качественных показателей неэвольвентных зубчатых зацеплений» («Gears») / Третьак Т.Е., Шелковий О.М., Мironenko О.Л., Мironenko С.О. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 117622 від 28 березня 2023 р.

**References (transliterated)**

1. Tatyana Tretyak, Alexander Mironenko, Yury Gutsalenko, Natalia Krukova, Sergey Mironenko. Structural approach to the mathematical description and computer visualization of plane kinematic curves for the display of gears. *Fiabilitate si Durabilitate - Fiability & Durability*, No 1 / 2018, Editura «Academica Brancusi», Targu Jiu. Pp. 7-11.
2. Tretyak Tatyana, Shelkovo Alexander, Gutsalenko Yury, Mironenko Alexander, Zubkova Nina, Mironenko Sergey, Structural approach to development of gearing with cutting of gears-links by rolling cutters of indirect linear side profile of teeth. *POLISH SCIENCE JOURNAL (ISSUE 5(14), 2019)*. Warsaw: Sp. z o. o. «iScience», 2019. Part 2. 165 p. P. 135-147.
3. Tretyak T.E., Shelkovo A.N., Gucalenko Yu.G., Mironenko A.L., Mironenko S.A. Matematicheskoe modelirovanie profilya zuboreznogo obkatochnogo instrumenta dlya obrabotki neevolventnykh zubchatykh koles. «Visnik Donbaskoyi derzhavnoyi mashinobudivnoyi akademiyi»: Zb. nauk. prac. Kramatorsk: DDMA, 2019. № 3 (47). 230 s. S. 121-129.
4. Tatyana Tretyak, Yury Gutsalenko, Alexander Shelkovo, Alexander Mironenko, Sergey Mironenko. Mathematical modeling of the profile of a gear cutting rolling tool for machining of non-involute gear wheels. *Fiabilitate si Durabilitate - Fiability & Durability*, No 2 / 2019, Editura «Academica Brancusi», Targu Jiu. P. 5-11.
5. Tretyak T.E., Mironenko A.L., Mironenko S.A. Issledovanie kachestvennykh pokazatelej zubchatykh peredach so slozhnym neevolventnym profilem bokovykh poverhnostej zubev. Visnik Nacionalnogo Tehnichnogo Universitetu «Harkivskij Politehnicnij Institut». Zbirnik naukovih prac. Seriya: Dinamika i mitsnist mashin. Harkiv: NTU «HPi». 2020. № 2. 85 s. S. 85-90.
6. Tretyak T.E., Shelkovo A.N., Gucalenko Yu.G., Mironenko S.A. Analiz kachestvennykh pokazatelej neevolventnykh zubchatykh peredach. Rezanie i instrument v tehnologicheskikh sistemah: Mezhdunar. nauch.-tehn. sb. Harkov: NTU «HPi», 2019. Vyp. 90. 188 s. S. 72-84.
7. Tretyak T., Gutsalenko Y., Mironenko A., Mironenko S. Research of quality indicators of non-evolvent gears. *Magyar Tudományos Journal (Budapest, Hungary)*. № 48 (2020). 52 p. P. 47-51.
8. Teoriia mekhanizmv i mashyn. Kurs lektzii dlia studentiv spetsialnosti „Dynamika i mitsnist mashyn” / Avtor: k.t.n., dots. O. P. Zakhovaiko. – K.: NTUU "KPI", 2010. – 243 s.
9. Zablonskij K.I., Belokonev I.M., Shekin B.M. Teoriya mehanizmov i mashin: Uchebnik. K.: Visha shkola, 1989. 376 s.
10. Detali mashyn, teoriia mekhanizmv i osnovy vzaieozaminnosti : kurs lektsii dlia studentiv tekhnichnykh spetsialnostei / S. H. Karnaukh, M. H. Tarovyk. – Kramatorsk : DDMA, 2018. – 252 s. ISBN 978-966-379-843-1

11. Perepelica B.A. Otobrazhenie affinnogo prostranstva v teorii formoobrazovaniya poverhnosti rezaniem. Harkov: Visha shk., 1981. 152 s.
12. Krivosheya A.V. Struktura mnogoparametricheskogo otobrazheniya, obobshayushaya stanochnye i rabochie zubchatye zacepleniya / A.V. Krivosheya // Vysokie tehnologii v mashinostroenii: modelirovanie, optimizatsiya, diagnostika: Tezisy dokl. Harkov: HGPU, 1995. S. 71.
13. Komp'yuterna programa «Geometricheskoe modelirovanie kinematicheskikh krivykh» («LinesModels») / Tretyak T.Ye., Shelkovij O.M., Mironenko O.L., Mironenko S.O. Svidoctvo pro reyestratsiyu avtorskogo prava na tvir № 118397 vid 24 kvitnya 2023 r.
14. Komp'yuterna programa «Issledovanie kachestvennykh pokazatelej neevolventnykh zubchatyh zaceplenykh» («Gears») / Tretyak T.Ye., Shelkovij O.M., Mironenko O.L., Mironenko S.O. Svidoctvo pro reyestratsiyu avtorskogo prava na tvir № 117622 vid 28 bereznya 2023 r.

Надійшла (received) 21.01.2026

*Відомості про авторів / About the Authors*

**Мироненко Сергій Олександрович (Myronenko Sergij)** - аспірант кафедри інтегрованих технологій машинобудування ім. М.Ф. Семка (ІТМ), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (НТУ «ХПІ»), м. Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8076-459X>, e-mail: [serg1prime@gmail.com](mailto:serg1prime@gmail.com).