

МИРОНЕНКО С. О.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ КОВЗАННЯ МІЖ ЗУБАМИ НЕЕВОЛЬВЕНТНИХ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

У статті обґрунтовано актуальність дослідження зубчастих передач зі складним неевольвентним профілем бічних поверхонь зубів, які в ряді областей застосування мають переваги перед евольвентними зубчастими передачами і позбавлені деяких їх недоліків, пов'язаних з якісними показниками. Показано, що для отримання сполучених поверхонь зубів двох неевольвентних зубчастих коліс можуть бути використані дві інструментальні рейки з профілями бічних поверхонь зубів, зворотними по відношенню один до одного. Як нелінійний профіль бічної поверхні зуба інструментальної рейки розглядається деяка ділянка однієї з модельованих плоских кінематичних кривих. Дано опис програми, яка дозволяє розраховувати геометричні характеристики формоутворених профілів коліс зубчастої пари, візуалізувати процес формоутворення, а також визначати якісні показники зубчастого зачеплення. Тим самим створено передумови для вибору з отриманого в результаті геометричного моделювання поля кривих таких профілів зубів інструментів, які б забезпечували найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс і необхідні якісні показники зубчастого зачеплення. Представлені результати дослідження коефіцієнта ковзання між зубами зубчастої передачі при виборі форми профілів зубів. Проведено серії чисельних експериментів для зубчастих зачеплень, утворених парами інструментальних рейок з різними профілями бічних поверхонь зубів – прямолінійними, опуклим і увігнутих, а також опукло-увігнутими. Показано, що неевольвентні зубчасті зачеплення можуть мати менші коефіцієнти ковзання в точках торкання профілів в порівнянні з евольвентними зачепленнями. Найбільш доцільним представляється варіант рейок з опуклим і увігнутих профілями зубів, що забезпечує найкращі значення якісних показників зачеплення.

Ключові слова: неевольвентне зубчасте зачеплення, формоутворення зубчастих коліс, поверхні, що сполучаються, інструментальна рейка, профіль зуба, плоска кінематична крива, якісні показники зубчастого зачеплення.

MIRONENKO S.

RESEARCH OF SLIP COEFFICIENTS BETWEEN TEETH OF NON-EVOLVENT GEARS

The article substantiates the relevance of the study of gears with a complex non-evolvent profile of the side surfaces of the teeth, which in some applications have advantages over evolvent gears and are devoid of some of their drawbacks associated with quality indicators. It is shown that to obtain the mating surfaces of the teeth of two non-evolvent gears, two tool rails can be used with the profiles of the side surfaces of the teeth opposite to each other. As a nonlinear profile of the tooth lateral surface of the tool rail, some part of one of the simulated flat kinematic curves is considered. A description of the program is given, which allows you to calculate the geometric characteristics of the shaped profiles of the gear pair wheels, visualize the shaping process, and also determine the quality indicators of the gearing. Thus, the prerequisites were created for choosing from the resulting geometric modeling of the curve field of such tooth profiles of the tools, which would provide the most rational combination of the tooth profiles of the gears processed by them and the required quality parameters of the gear teeth. The results of the study of the slip coefficients between the teeth of a gear when choosing the shape of the tooth profiles are presented. A series of numerical experiments for gearing, formed by pairs of tool rails with different profiles of the side surfaces of the teeth – straight, convex and concave, as well as convex-concave – were performed. It is shown that non-evolvent gearing can have smaller slip coefficients at the points of tangency of the profiles compared to evolvent gearing. The most preferable is the variant of the rails with convex and concave tooth profiles, which provides the best values of quality indicators of the engagement.

Keywords: non-evolvent gearing, shaping of gears, mating surfaces, tool rail, tooth profile, flat kinematic curve, quality indicators of gearing.

Вступ.

У сучасному машинобудуванні до зубчастих передач пред'являються високі вимоги. Вони повинні забезпечувати передачу великих обертаючих моментів, бути точними та швидкохідними, плавними та безшумними. Разом з тим зубчасті зачеплення повинні характеризуватися високою працездатністю: надійністю, довговічністю, безвідмовністю, ремонтпридатністю.

На стадії проектування зубчастих передач їх найважливіші експлуатаційні властивості (плавність зачеплення, міцність та знос зубів коліс) оцінюються за низкою якісних показників працездатності зачеплення. Коефіцієнт перекриття дозволяє оцінити безперервність зубчастого зачеплення, плавність та безшумність роботи передачі. Коефіцієнт тиску між зубами характеризує силову взаємодію зубчастих коліс, їхню контактну міцність. Коефіцієнт ковзання зубів враховує вплив геометричних та кінематичних факторів на інтенсивність зносу профілів зубів, є показником їхньої зносостійкості. Коефіцієнт форми зуба характеризує згинальну міцність зубів.

Найбільш поширеними механічними передачами, які застосовуються в машинобудуванні, є зубчасті передачі з евольвентним профілем бічних поверхонь зубів. Передачі, складені з таких коліс, відрізняються рядом переваг, однак мають при цьому і цілий ряд недоліків. Тому актуальною задачею є дослідження зубчастих передач зі складним неевольвентним профілем бічних поверхонь зубів, які в ряді областей застосування при вдалому виборі поєднання профілів зубів мають переваги перед евольвентними зубчастими передачами за якісними показниками.

Мета дослідження.

Дослідження спрямовані на комплексний аналіз якісних показників неевольвентних зубчастих зачеплень, зокрема розробку математичної моделі розрахунку коефіцієнтів ковзання між зубами зубчастої передачі, з метою вибору з отриманого в результаті геометричного моделювання поля кривих таких профілів зубів інструментів, які б забезпечували найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс і необхідні якісні показники зубчастого зачеплення.

Викладення основного матеріалу та результати.

У ряді попередніх наукових досліджень було розроблено геометричну модель кінематичної кривої як потенційного профілю бічної поверхні зуба зуборізного інструменту та математичну модель розрахунку профілю зуба зуборізного інструменту для обробки невольвентних зубчастих коліс [1, 2, 3, 4]; розроблено методику геометричного аналізу процесу формоутворення поверхонь обкатними зуборізними інструментами та методику отримання профілів сполучених поверхонь зубів невольвентних зубчастих коліс як огинаючих поверхонь зубів інструментів [2, 3, 4, 5]; розроблено математичну модель розрахунку профілю огинаючої поверхні зуба зубчастого колеса, оброблюваного за методом обкатки, та математичну модель розрахунку коефіцієнтів тиску між зубами та перекриття зубчастої передачі з метою спрямованого формування заданих параметрів її якісних показників [2, 5, 6, 7].

У продовженні та розвитку цих досліджень для подальшої можливості комплексного аналізу якісних показників невольвентних зубчастих зачеплень вирішується задача математичного моделювання розрахунку коефіцієнтів ковзання між зубами зубчастої передачі, складеної з невольвентних зубчастих коліс.

Ведуча та ведена ланки зубчастих механізмів утворюють у місці контакту вищу кінематичну пару. Для забезпечення передачі руху від ведучої ланки до веденої в цій парі повинні виконуватись геометричні та кінематичні умови [8-10]. Відповідно до геометричної умови, у точці контакту профілів поверхні ланок повинні мати загальну нормаль. Відповідно до кінематичної умови, проекції швидкостей контактуючих точок обох ланок на загальну нормаль повинні бути однакові.

Розглянемо плоску задачу торкання поверхонь зубчастих коліс 1 і 2. Поверхні зубчастих коліс зв'яжемо з реперами $x_1y_1z_1$ і $x_2y_2z_2$. Вихідне положення реперів, параметри рухів φ_1 і φ_2 , параметри їх швидкостей ω_1 і ω_2 , а також центроїди коліс представлено на рис. 1. У нормальному перерізі центроїди коліс є окружностями з радіусами r_1 і r_2 . На рисунку показано три послідовні моменти торкання профілів зубів у точках L , P і M . Ці точки лежать на лінії зачеплення, точка P є миттєвим полюсом зачеплення. У випадку евольвентного зачеплення профілів зубів лінія зачеплення є прямою. У загальному випадку, коли профілі мають довільну невольвентну форму, лінія зачеплення є деякою кривою, що проходить через полюс зачеплення.

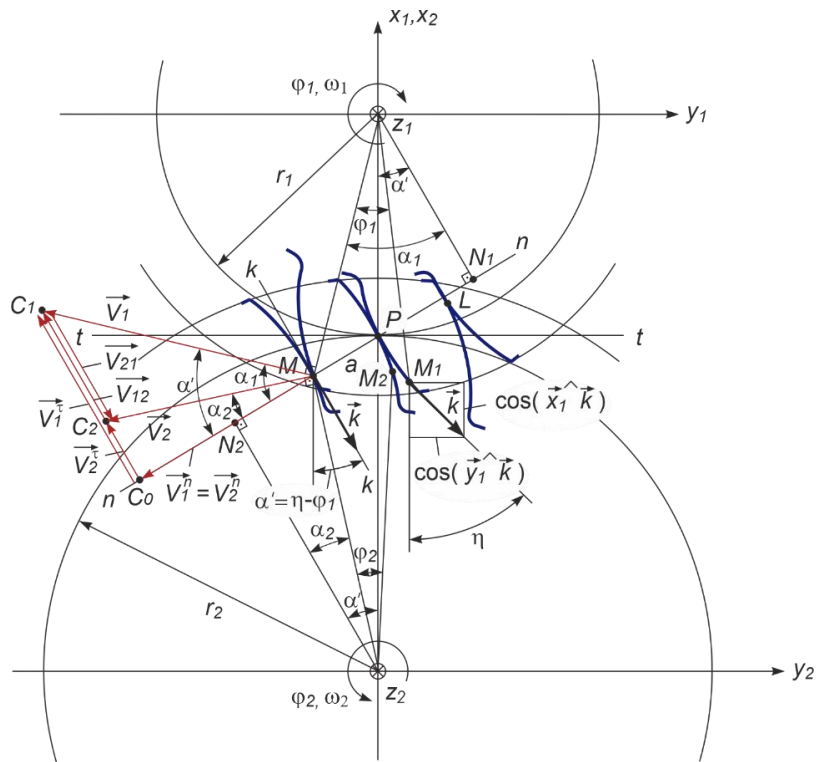


Рис. 1 - До розрахунку коефіцієнтів ковзання між зубами зубчастої передачі

Лінія $t-t$ – загальна дотична до центроїд у точці P . Прямая $n-n$, що проходить через полюс зачеплення, є загальною нормаллю, а пряма $k-k$ – загальною дотичною до профілів у точці торкання M .

Профільна нормаль $n-n$ та дотична до центроїд $t-t$ утворюють між собою кут α' . У загальному випадку, коли профілі зубів неевольвентні, значення кута α' різні для різних точок торкання профілів і не збігаються зі значенням кута α , що відповідає торканню профілів у полюсі зачеплення P .

Відстань MP між точкою торкання профілів M та полюсом зачеплення P , виміряне за профільною нормаллю, позначимо як a . Точки перетину загальної нормалі до профілів $n-n$ та перпендикулярів, опущених на нормаль з точок центрів центроїд коліс O_1 і O_2 , позначимо як N_1 і N_2 .

Вихідне положення профілів відповідає моменту торкання профілів зубів у точці P (рис. 1). У цей момент точка M , що належить одночасно профілям зубів двох зубчастих коліс в інший момент торкання, роздвоюється і на профілях зубів позначена точками M_1 і M_2 .

У процесі зачеплення профілів зубів спостерігається як кочення профілю по профілю, а й їх ковзання друг по другу. Під час руху точок M_1 і M_2 до точки контакту M вони проходять різні шляхи M_1M і M_2M . Водночас дуга M_1P профілю зуба колеса 1 переміщається по дузі M_2P профілю зуба колеса 2, але довжини цих дуг не рівні. Внаслідок цього кочення профілів супроводжується ковзанням.

Для оцінки взаємного ковзання профілів зубів користуються поняттям питомого ковзання зубів. Під питомим ковзанням розуміється відношення швидкостей ковзання профілів V_{12} і V_{21} у точці їх контакту до тангенціальних складових V_1^t і V_2^t швидкостей точок контакту (тобто до проєкцій цих швидкостей на загальну дотичну до профілів) [8]. Тоді коефіцієнти питомого ковзання в точках контакту профілів зубів зубчастих коліс 1 і 2 можна визначити за формулами:

$$\lambda_1 = \frac{V_{12}}{V_1^t}; \lambda_2 = \frac{V_{21}}{V_2^t}. \quad (1)$$

Для визначення швидкостей V_{12} і V_{21} , а також тангенціальних складових V_1^t і V_2^t швидкостей точок контакту сполучених профілів побудуємо план швидкостей зубчастого зачеплення, прийнявши за полюс плану швидкостей точку M . Умовою існування вищої кінематичної пари є умова нерозривності контакту ланок, що полягає в тому, що проєкції швидкостей ланок у точці контакту на контактну нормаль до профілів мають бути рівними. З точки M перпендикулярно до відрізків O_1M і O_2M проведемо вектори \vec{V}_1 і \vec{V}_2 швидкостей руху точок профілів зубів зубчастих коліс 1 і 2 такої довжини, щоб їх проєкції на загальну нормаль до профілів \vec{V}_1^n і \vec{V}_2^n збігалися. Вектори швидкостей ковзання \vec{V}_{12} і \vec{V}_{21} визначаються з плану швидкостей як вектори, пропорційні відріzkу C_1C_2 , де точки C_1 і C_2 – кінці векторів \vec{V}_1 і \vec{V}_2 . Вектори тангенціальних складових швидкостей точок контакту \vec{V}_1^t і \vec{V}_2^t пропорційні відріzkам C_0C_1 і C_0C_2 , де точка C_0 – кінець векторів \vec{V}_1^n і \vec{V}_2^n , що збігаються. Відносний рух зубчастих коліс 1 і 2 можливий у напрямку загальної дотичної до профілів у точці дотику $\kappa-\kappa$. Цей рух характеризується векторами швидкостей ковзання профілів \vec{V}_{12} і \vec{V}_{21} у точці їх контакту, які, як видно з плану швидкостей (рис. 1), можна визначити як різниці проєкцій швидкостей точок контакту \vec{V}_1 і \vec{V}_2 або як різниці проєкцій швидкостей точок контакту на загальну дотичну до профілів (різниці тангенціальних складових цих швидкостей) \vec{V}_1^t і \vec{V}_2^t :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{12} &= \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1^t - \vec{V}_2^t; \\ \vec{V}_{21} &= \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = \vec{V}_2^t - \vec{V}_1^t. \end{aligned} \quad (2)$$

Для визначення співвідношення швидкостей у передачі розглянемо трикутник MC_1C_0 , утворений векторами швидкостей \vec{V}_1 , \vec{V}_1^t , \vec{V}_1^n , і трикутник O_1MN_1 (рис. 1). Із подібності цих трикутників запишемо таке співвідношення:

$$\frac{V_1}{O_1M} = \frac{V_1^t}{MN_1} = \frac{V_1^n}{O_1N_1}. \quad (3)$$

Тоді з рівняння (3) з урахуванням того, що відношення $\frac{V_1}{O_1M} = \omega_1$, тобто дорівнює кутовій швидкості обертання зубчастого колеса 1, отримаємо вираз для тангенціальної складової вектору швидкості точки контакту на зубчастому колесі 1:

$$V_1^r = \omega_1 \cdot N_1M. \quad (4)$$

Із подібності трикутника MC_2C_0 , утвореного векторами швидкостей \vec{V}_2 , \vec{V}_2^r , \vec{V}_2^n , і трикутника O_2MN_2 , запишемо співвідношення:

$$\frac{V_2}{O_2M} = \frac{V_2^r}{MN_2} = \frac{V_2^n}{O_2N_2}. \quad (5)$$

Із рівняння (5) з урахуванням того, що відношення $\frac{V_2}{O_2M} = \omega_2$, тобто дорівнює кутовій швидкості обертання зубчастого колеса 2, отримуємо вираз для тангенціальної складової вектору швидкості точки контакту на зубчастому колесі 2:

$$V_2^r = \omega_2 \cdot N_2M. \quad (6)$$

Тоді вираз для швидкості ковзання V_{12} можна записати у вигляді:

$$V_{12} = V_1^r - V_2^r = \omega_1 \cdot N_1M - \omega_2 \cdot N_2M = \omega_1 \cdot (N_1P + PM) - \omega_2 \cdot (N_2P - PM) = (\omega_1 + \omega_2) \cdot PM + (\omega_1 \cdot N_1P - \omega_2 \cdot N_2P). \quad (7)$$

Доведемо, що у співвідношенні (7) вираз у останніх дужках дорівнює нулю. Для зубчастих коліс 1 і 2 параметри обертань φ_1 і φ_2 , а також параметри їх швидкостей ω_1 і ω_2 пов'язані між собою залежностями:

$$\varphi_1 = i \cdot \varphi_2, \quad \omega_1 = i \cdot \omega_2, \quad (8)$$

де i – передатне відношення зубчастої передачі, яке можна визначити через відношення радіусів центрів або відношення кількостей зубів зубчастих коліс наступним чином:

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (9)$$

Із подібності трикутників N_1O_1P і N_2O_2P запишемо співвідношення:

$$\frac{N_1O_1}{N_2O_2} = \frac{O_1P}{O_2P} = \frac{N_1P}{N_2P}. \quad (10)$$

Оскільки $O_1P = r_1$; $O_2P = r_2$, використовуючи залежності (8) і (9), можна записати вираз:

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{N_1P}{N_2P} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{i} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (11)$$

Звідси випливає, що $\omega_1 \cdot N_1P = \omega_2 \cdot N_2P$ та вираз (7) для швидкості ковзання V_{12} можна переписати в наступному вигляді:

$$V_{12} = V_1^r - V_2^r = (\omega_1 + \omega_2) \cdot PM. \quad (12)$$

Тоді вираз для швидкості ковзання V_{21} запишеться наступним чином:

$$V_{21} = V_2^r - V_1^r = -(\omega_1 + \omega_2) \cdot PM. \quad (13)$$

Як показують формули (12) і (13), швидкість ковзання в точках контакту профілів зубів 1 і 2 дорівнює добутку швидкості відносного обертання зубчастих коліс та відстані PM між точкою торкання профілів M та полюсом зачеплення P .

При суміщенні точки контакту з полюсом зачеплення відстань $PM = 0$, а значить швидкість ковзання $V_{12} = V_{21} = 0$, профілі зубів обкатуються без ковзання та має місце лише їхнє перекочування. В цьому випадку передача руху від одного зубчастого колеса до іншого відбувається за рахунок сил тертя, що виникають у зоні контакту і забезпечують перекочування профілів без їхнього відносного ковзання.

Якщо ж точка контакту профілів не збігається з полюсом зачеплення, то передача руху відбувається

шляхом тиску одного профілю зуба на інший з їх відносним ковзанням. При цьому початкові окружності зубчастих коліс (центроїди з радіусами r_1 і r_2) обкатуються одна відносно іншої без ковзання [8].

Підставивши співвідношення (12), (13), (4) і (6) у формули (1), отримаємо вирази для визначення коефіцієнтів питомого ковзання в точках контакту профілів зубів зубчастих коліс 1 і 2:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(\omega_1 + \omega_2) \cdot PM}{\omega_1 \cdot N_1 M} = \frac{(\omega_1 + \omega_2) \cdot PM}{\omega_1 \cdot (N_1 P + PM)} = \left(1 + \frac{1}{i}\right) \frac{PM}{(N_1 P + PM)}; \\ \lambda_2 &= \frac{-(\omega_1 + \omega_2) \cdot PM}{\omega_2 \cdot N_2 M} = \frac{-(\omega_1 + \omega_2) \cdot PM}{\omega_2 \cdot (N_2 P - PM)} = (1+i) \frac{-PM}{(N_2 P - PM)}.\end{aligned}\quad (14)$$

Як показують формули (14), абсолютні значення коефіцієнтів питомого ковзання зростають зі збільшенням відстані PM між точкою торкання профілів M і полюсом зачеплення P , а також при зменшенні відстаней $N_1 P$ і $N_2 P$, що залежать від геометричних параметрів зубчастої передачі. При суміщенні точки контакту з полюсом зачеплення відстань $PM = 0$, коефіцієнти ковзання $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

При підрахунку λ_1 і λ_2 необхідно мати на увазі, що якщо зубчасті колеса 1 і 2 мають різну кількість зубів z_1 і z_2 , то за час повного обороту колеса з меншою кількістю зубів колесо з більшою кількістю зубів не встигає здійснити повний оборот, його зуби в i раз рідше вступають у контакт в порівнянні з зубами меншого колеса та, як наслідок, менше зношуються. Отже, щоб порівняти інтенсивність зносу зубів коліс за коефіцієнтом питомого ковзання, при підрахунку коефіцієнтів ковзання необхідно помножити чи розділити λ_1 або λ_2 на величину i .

У тому випадку, коли більшим зубчастим колесом є колесо 1, тобто $z_1 > z_2$, коефіцієнти питомого ковзання в точках профілів зубів визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= \lambda_1 \cdot i = \left(1 + \frac{1}{i}\right) \cdot i \frac{PM}{(N_1 P + PM)} = (1+i) \frac{PM}{(N_1 P + PM)}; \\ \lambda_2' &= \lambda_2 = (1+i) \frac{-PM}{(N_2 P - PM)}.\end{aligned}\quad (15)$$

Якщо ж більшим зубчастим колесом є колесо 2, тобто $z_2 > z_1$, формули для визначення коефіцієнтів питомого ковзання мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= \lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{i}\right) \frac{PM}{(N_1 P + PM)}; \\ \lambda_2' &= \frac{\lambda_2}{i} = \frac{1+i}{i} \frac{-PM}{(N_2 P - PM)} = \left(1 + \frac{1}{i}\right) \frac{-PM}{(N_2 P - PM)}.\end{aligned}\quad (16)$$

У процесі зачеплення точка контакту профілів рухається вздовж лінії зачеплення у напрямку від точки входу зубів у зачеплення до точки виходу зубів із зачеплення. Вирази (15) і (16) справедливі для моментів торкання профілів у точках, подібних до точки M , що відповідає контакту точки M_1 профілю головки зуба зубчастого колеса 1 і точки M_2 профілю ніжки зуба зубчастого колеса 2. Для моментів торкання профілів у точках, подібних до точки L (рис. 1), що відповідає контакту точки профілю ніжки зуба зубчастого колеса 1 і точки профілю головки зуба зубчастого колеса 2, у вирази (15) і (16) необхідно ввести корективи, змінивши знаки перед усіма входженнями у вирази відстані PM .

З урахуванням того, що $PM = a$; $N_1 P = r_1 \cdot \sin \alpha'$; $N_2 P = r_2 \cdot \sin \alpha'$, отримаємо остаточні вирази для визначення коефіцієнтів питомого ковзання в точках контакту профілів зубів зубчастих коліс 1 і 2:

для випадку $z_1 > z_2$

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= (1+i) \frac{\pm a}{(r_1 \cdot \sin \alpha' \pm a)}; \\ \lambda_2' &= (1+i) \frac{\mp a}{(r_2 \cdot \sin \alpha' \mp a)};\end{aligned}\quad (17)$$

для випадку $z_2 > z_1$

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= \left(1 + \frac{1}{i}\right) \frac{\pm a}{(r_1 \cdot \sin \alpha' \pm a)}; \\ \lambda_2' &= \left(1 + \frac{1}{i}\right) \frac{\mp a}{(r_1 \cdot \sin \alpha' \mp a)},\end{aligned}\quad (18)$$

при цьому знак перед змінною a залежить від розташування точок торкання на профілях: верхній із знаків « \pm » або « \mp » перед змінною a необхідно використовувати при розрахунку коефіцієнтів ковзання для моментів торкання профілів у точках, подібних до точки M , а нижній – у разі розрахунку для моментів торкання профілів у точках, подібних до точки L .

Для знаходження значень параметрів α' і a скористаємося такими міркуваннями. Як було зазначено вище, вихідне положення профілів відповідає моменту торкання профілів зубів у точці P (рис. 1). У цей момент точка M , що належить одночасно профілям зубів двох зубчастих коліс в інший момент торкання, на профілях зубів позначена точками M_1 і M_2 .

У вихідному положенні в точках профілю зубчастого колеса 1 відомі їх координати та напрямки векторів дотичних \vec{k} до профілю, що визначаються їх напрямними косинусами або кутом нахилу дотичної до профілю η . На рис. 1 показані їх позначення для точки M_1 . Момент торкання профілів у точці M , коли точки M_1 і M_2 на профілях зливаються, відповідає повороту зубчастих коліс 1 і 2 на кути φ_1 і φ_2 відповідно. До відомої вихідної інформації також відносяться значення кутів торкання профілів φ_2 для різних точок [2]. Параметри рухів пов'язані між собою відповідно до залежностей (8) і (9).

Із рис. 1 видно, що у момент торкання профілів у точці M значення кута α' можна визначити як різницю кута нахилу дотичної до профілю η і кута повороту φ_1 зубчастого колеса 1. Отже, для будь-якої точки торкання профілів буде справедливе співвідношення:

$$\alpha' = \eta - \varphi_2 \cdot \frac{r_1}{r_2}. \quad (19)$$

Значення $a = PM$ можна визначити, обчисливши координати точок M і P , а потім довжину відрізка PM у перерізі x_1y_1 .

Точка M утворюється поворотом вихідної точки M_1 на кут φ_1 навколо осі z_1 (див. рис. 1). В перерізі x_1y_1 точка M_1 має відомі координати x_1 і y_1 . Тоді координати точки M у цьому перерізі можна визначити з наступних залежностей:

$$\begin{aligned}x_1^M &= x_1 \cdot \cos \varphi_1 - y_1 \cdot \sin \varphi_1; \\ y_1^M &= x_1 \cdot \sin \varphi_1 + y_1 \cdot \cos \varphi_1.\end{aligned}\quad (20)$$

Координати точки P в перерізі x_1y_1 дорівнюють:

$$\begin{aligned}x_1^P &= -r_1; \\ y_1^P &= 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Довжина відрізка PM обчислюється наступним чином:

$$MP = \sqrt{(x_1^M - x_1^P)^2 + (y_1^M - y_1^P)^2}. \quad (22)$$

З урахуванням залежностей (8), (9), (20) і (21) отримаємо формулу для обчислення величини a у будь-якій точці торкання профілів:

$$a = \sqrt{\left(x_1 \cdot \cos\left(\varphi_2 \frac{r_2}{r_1}\right) - y_1 \cdot \sin\left(\varphi_2 \frac{r_2}{r_1}\right) + r_1\right)^2 + \left(x_1 \cdot \sin\left(\varphi_2 \frac{r_2}{r_1}\right) + y_1 \cdot \cos\left(\varphi_2 \frac{r_2}{r_1}\right)\right)^2} \quad (23)$$

Обчисливши значення α' і a за формулами (19) і (23), за формулами (17) і (18) можна визначити значення коефіцієнтів питомого ковзання в точках контакту профілів зубів зубчастих коліс 1 і 2.

Було розроблено систему взаємопов'язаних програмних модулів на мові програмування Delphi, що дозволяє проводити комплексний аналіз якісних показників невольвентних зубчастих передач:

- програмний модуль «Геометричне моделювання кінематичних кривих (LinesModel)»;
- програмний модуль «Дослідження якісних показників невольвентних зубчастих зачеплень (Gears)».

Комп'ютерну програму LinesModel призначено для геометричного моделювання плоских кінематичних кривих як потенційних профілів бічних поверхонь зубів зуборізних інструментів для виготовлення невольвентних зубчастих передач. При розробці програми застосовано математичний апарат багатопараметричних відображень простору, узагальнену уніфіковану структуру відображення для робочих і верстатних зубчастих зачеплень [11, 12]. Кінематична крива розглядається як безперервна траєкторія складного руху точки у триланковому зубчастому зачепленні.

За допомогою програми створено передумови для вибору з отриманого в результаті геометричного моделювання поля кінематичних кривих таких профілів зубів інструментів, які б забезпечували найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс і необхідні якісні показники зубчастого зачеплення [13].

Комп'ютерну програму Gears призначено для геометричного аналізу процесу формоутворення поверхонь зубів обкатними зуборізними інструментами за допомогою комп'ютерної графіки, розрахунку та аналізу якісних показників зубчастих зачеплень, утворених рейками з різним профілем бічних поверхонь зубів, вибору форми профілів зубів інструментів, що забезпечують найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс [14]. Програму розроблено на базі узагальненої математичної моделі формування профілів ріжучої частини інструментів для формоутворення невольвентних зубчастих передач на основі кінематичного аналізу їх руху методами теорії відображень простору [11, 6].

Вікно програми Gears для вибору або введення вихідних даних наведено на рис. 2. У продовженні попередніх досліджень коефіцієнтів перекриття зубчастого зачеплення та тиску між зубами зубчастої передачі за допомогою програми було проведено серії чисельних експериментів для розрахунку та аналізу коефіцієнтів ковзання між зубами зубчастих зачеплень, утворених рейками з різним профілем бічних поверхонь зубів. На рис. 3-5 наведено приклади зачеплення профілів бічних поверхонь зубів зубчастих коліс з модулем $m = 5$ мм і кількостями зубів $z_1 = 20$ і $z_2 = 30$, утворених інструментальної рейкою з прямолінійним профілем, інструментальними рейками 1 і 2 з увігнутим і опуклим профілями, а також інструментальними рейками 1 і 2 з увігнуто-опуклими профілями зубів відповідно. У першому випадку профілі зубів зубчастих коліс – евольвентні.

На рис. 3-5 також представлено графіки з чисельними значеннями коефіцієнтів ковзання в точках торкання профілів зубів зубчастих коліс (n – номери точок профілів зубів). У представлених прикладах в зубчастих зачепленнях, утворених рейкою з прямолінійним профілем зубів, середні значення коефіцієнтів ковзання між зубами зубчастої передачі становлять $\lambda_{1\text{ серед}} = 0.871$, $\lambda_{2\text{ серед}} = 0.425$; в зубчастих зачепленнях, утворених рейками 1 і 2 з увігнутим і опуклим профілями зубів – $\lambda_{1\text{ серед}} = 0.320$, $\lambda_{2\text{ серед}} = 0.306$, в зубчастих зачепленнях, утворених рейками 1 і 2 з увігнуто-опуклими профілями зубів – $\lambda_{1\text{ серед}} = 0.476$, $\lambda_{2\text{ серед}} = 0.289$. Отже, для невольвентних зубчастих зачеплень коефіцієнти ковзання менші в середньому в 2.1 і в 1.7 рази, ніж в евольвентному зачепленні.

Висновки.

Для комплексного аналізу якісних показників невольвентних зубчастих зачеплень розроблено математичну модель розрахунку коефіцієнтів ковзання між зубами зубчастої передачі. Виконано аналіз коефіцієнтів ковзання між зубами зубчастих зачеплень, утворених рейками з різним профілем бічних поверхонь зубів. Результати чисельних експериментів показують, що невольвентні зубчасті зачеплення можуть мати менші коефіцієнти ковзання в точках торкання профілів зубів у порівнянні з евольвентними.

Створено передумови для вибору отриманого в результаті геометричного моделювання поля кривих таких профілів зубів інструментів, які забезпечували б найбільш раціональне поєднання профілів зубів оброблених ними зубчастих коліс і необхідні якісні показники зубчастого зачеплення.

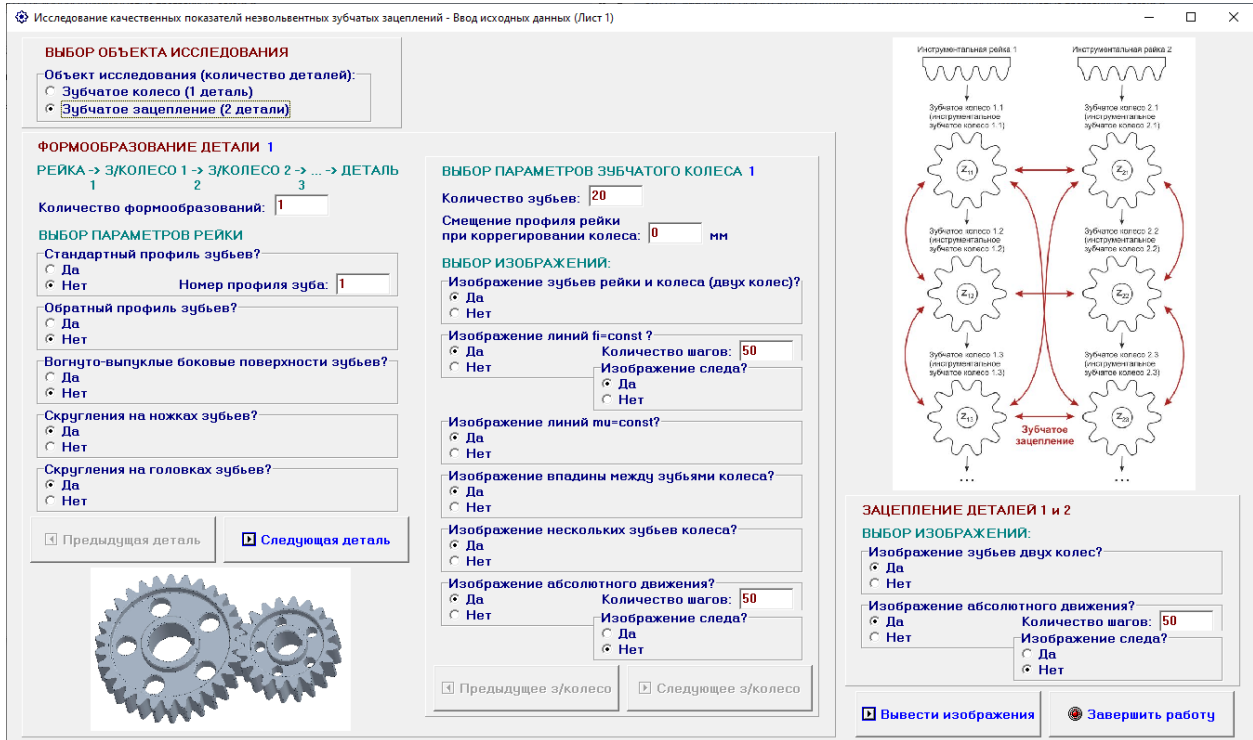


Рис. 2 – Вікно програми Gears для вибору або введення вихідних даних

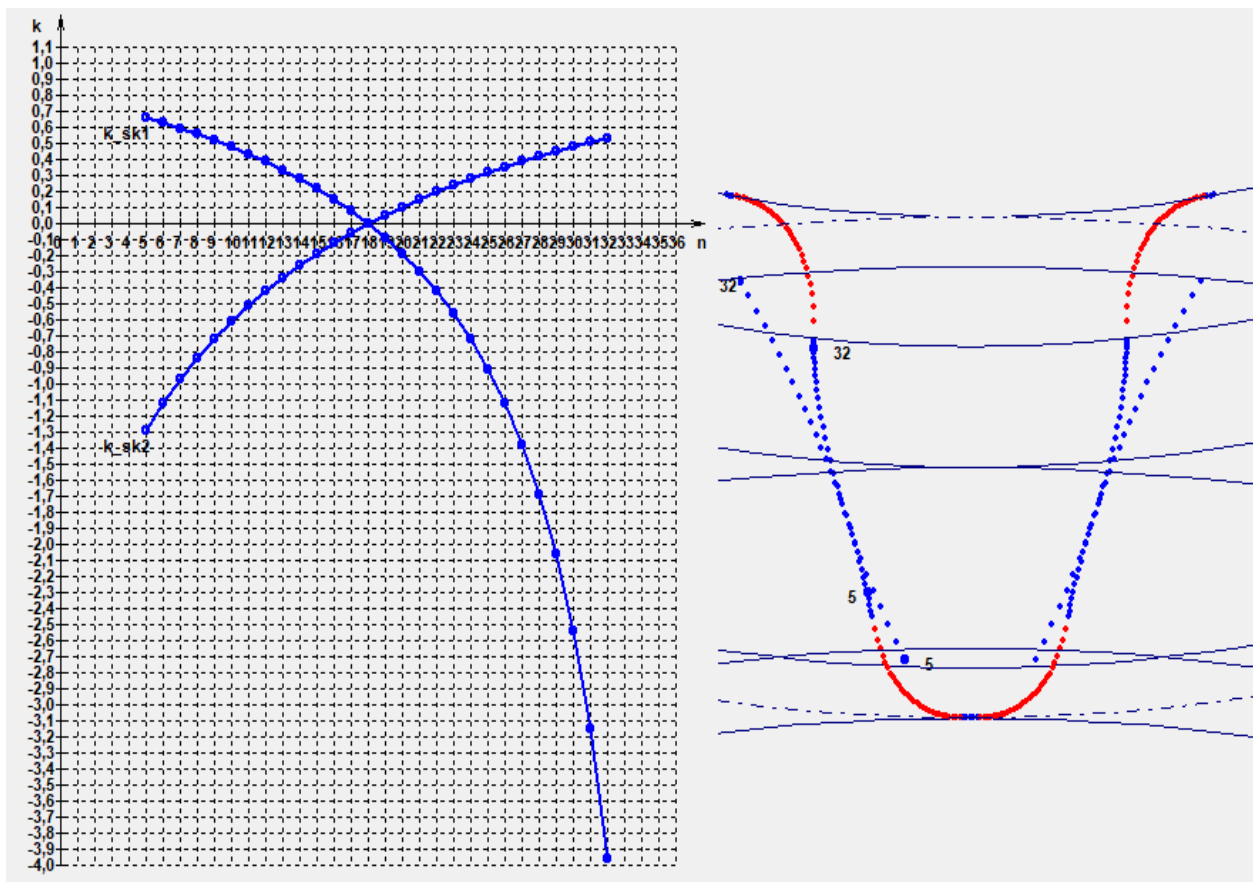


Рис. 3 – Зачеплення профілів бічних поверхонь зубів зубчастих коліс з $m = 5$ мм, $z_1 = 20$ і $z_2 = 30$, утворених інструментальною рейкою з прямолінійним профілем зубів та графіки коефіцієнтів ковзання в точках торкання профілів зубів зубчастих коліс

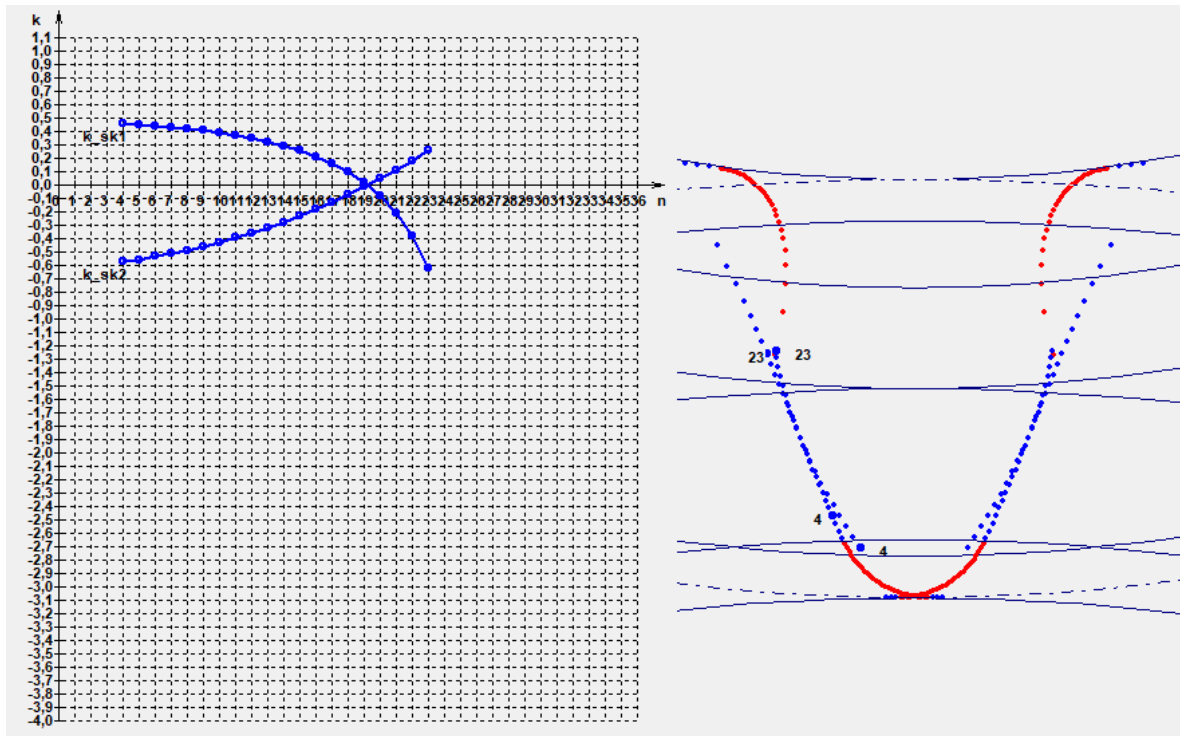


Рис. 4 – Зачеплення профілів бічних поверхонь зубів зубчастих коліс з $m = 5$ мм, $z_1 = 20$ і $z_2 = 30$, утворених інструментальними рейками 1 і 2 з увігнутим і опуклим профілями зубів та графіки коефіцієнтів ковзання в точках торкання профілів зубів зубчастих коліс

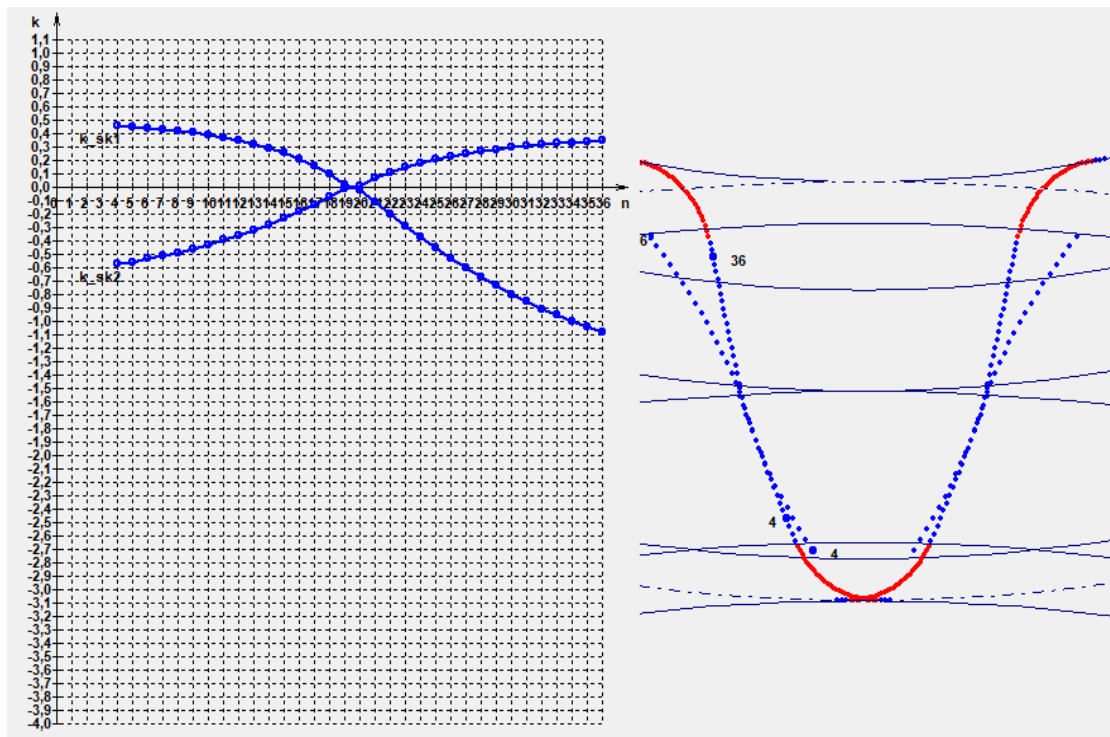


Рис. 5 – Зачеплення профілів бічних поверхонь зубів зубчастих коліс з $m = 5$ мм, $z_1 = 20$ і $z_2 = 30$, утворених інструментальними рейками 1 і 2 з увігнуто-опуклими профілями зубів та графіки коефіцієнтів ковзання в точках торкання профілів зубів зубчастих коліс

Список літератури:

1. Tatyana Tretyak, Alexander Mironenko, Yury Gutsalenko, Natalia Krukova, Sergey Mironenko. Structural approach to the mathematical description and computer visualization of plane kinematic curves for the display of gears. *Fiabilitate si Durabilitate - Fiability & Durability*, No 1 / 2018, Editura «Academica Brăncuși», Târgu Jiu. Pp. 7-11.
2. Tretyak Tatyana, Shelkovoy Alexander, Gutsalenko Yury, Mironenko Alexander, Zubkova Nina, Mironenko Sergey, Structural approach to development of gearing with cutting of gears-links by rolling cutters of indirect linear side profile of teeth. *POLISH SCIENCE JOURNAL (ISSUE 5(14), 2019)*. Warsaw: Sp. z o. o. «iScience», 2019. Part 2. 165 p. P. 135-147.
3. Третьак Т.Е., Шелковой А.Н., Гуцаленко Ю.Г., Мironenko А.Л., Мironenko С.А. Математическое моделирование профиля зуборезного обкаточного инструмента для обработки неэвольвентных зубчатых колес. «Вісник Донбаської державної машинобудівної академії»: Зб. наук. праць. Краматорськ: ДДМА, 2019. № 3 (47). 230 с. С. 121-129.
4. Tatyana Tretyak, Yury Gutsalenko, Alexander Shelkovoi, Alexander Mironenko, Sergey Mironenko. Mathematical modeling of the profile of a gear cutting rolling tool for machining of non-involute gear wheels. *Fiabilitate si Durabilitate - Fiability & Durability*, No 2 / 2019, Editura «Academica Brăncuși», Târgu Jiu. P. 5-11.
5. Третьак Т.Е., Мironenko А.Л., Мironenko С.А. Исследование качественных показателей зубчатых передач со сложным неэвольвентным профилем боковых поверхностей зубьев. Вісник Національного Технічного Університету «Харківський Політехнічний Інститут». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ». 2020. № 2. 85 с. С. 85-90.
6. Третьак Т.Е., Шелковой А.Н., Гуцаленко Ю.Г., Мironenko С.А. Анализ качественных показателей неэвольвентных зубчатых передач. Резание и инструмент в технологических системах: Междунар. науч.-техн. сб. Харьков: НТУ «ХПИ», 2019. Вып. 90. 188 с. С. 72-84.
7. Tretyak T., Gutsalenko Y., Mironenko A., Mironenko S. Research of quality indicators of non-evolvent gears. *Magyar Tudományos Journal (Budapest, Hungary)*. № 48 (2020). 52 p. P. 47-51.
8. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: Учебник для вузов. М.: Наука, 1988. 640 с.
9. Заблонский К.И., Белоконов И.М., Шекин Б.М. Теория механизмов и машин: Учебник. К.: Вища школа, 1989. 376 с.
10. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука, 1968. 584с.
11. Перепелица Б.А. Отображение аффинного пространства в теории формообразования поверхности резанием. Харьков: Вища шк., 1981. 152 с.
12. Кривошея А.В. Структура многопараметрического отображения, обобщающая станочные и рабочие зубчатые зацепления / А.В. Кривошея // Высокие технологии в машиностроении: моделирование, оптимизация, диагностика: Тезисы докл. Харьков: ХГПУ, 1995. С. 71.
13. Комп'ютерна програма «Геометрическое моделирование кинематических кривых» («LinesModel») / Третьак Т.Е., Шелковий О.М., Мironenko О.Л., Мironenko С.О. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 118397 від 24 квітня 2023 р.
14. Комп'ютерна програма «Исследование качественных показателей неэвольвентных зубчатых зацеплений» («Gears») / Третьак Т.Е., Шелковий О.М., Мironenko О.Л., Мironenko С.О. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 117622 від 28 березня 2023 р.

References (transliterated)

1. Tatyana Tretyak, Alexander Mironenko, Yury Gutsalenko, Natalia Krukova, Sergey Mironenko. Structural approach to the mathematical description and computer visualization of plane kinematic curves for the display of gears. *Fiabilitate si Durabilitate - Fiability & Durability*, No 1 / 2018, Editura «Academica Brancusi», Targu Jiu. Pp. 7-11.
2. Tretyak Tatyana, Shelkovoy Alexander, Gutsalenko Yury, Mironenko Alexander, Zubkova Nina, Mironenko Sergey, Structural approach to development of gearing with cutting of gears-links by rolling cutters of indirect linear side profile of teeth. *POLISH SCIENCE JOURNAL (ISSUE 5(14), 2019)*. Warsaw: Sp. z o. o. «iScience», 2019. Part 2. 165 p. P. 135-147.
3. Tretyak T.E., Shelkovoj A.N., Gucalenko Yu.G., Mironenko A.L., Mironenko S.A. Matematicheskoe modelirovanie profilya zuboreznogo obkatochnogo instrumenta dlya obrabotki neevolventnyh zubchatyh kolos. «Visnik Donbaskoyi derzhavnoyi mashinobudivnoyi akademiyi»: Zb. nauk. prac. Kramatorsk: DDMA, 2019. № 3 (47). 230 s. S. 121-129.
4. Tatyana Tretyak, Yury Gutsalenko, Alexander Shelkovoi, Alexander Mironenko, Sergey Mironenko. Mathematical modeling of the profile of a gear cutting rolling tool for machining of non-involute gear wheels. *Fiabilitate si Durabilitate - Fiability & Durability*, No 2 / 2019, Editura «Academica Brancusi», Targu Jiu. P. 5-11.
5. Tretyak T.E., Mironenko A.L., Mironenko S.A. Issledovanie kachestvennyh pokazatelej zubchatyh peredach so slozhnym neevolventnym profilem bokovyh poverhnostej zubev. Visnik Nacionalnogo Tehnichnogo Universitetu «Harkivskij Politehniknij Institut». Zbimik naukovih prac. Seriya: Dinamika i micnist mashin. Harkiv: NTU «HPI». 2020. № 2. 85 s. S. 85-90.
6. Tretyak T.E., Shelkovoj A.N., Gucalenko Yu.G., Mironenko S.A. Analiz kachestvennyh pokazatelej neevolventnyh zubchatyh peredach. Rezanie i instrument v tehnologicheskikh sistemah: Mezhdunar. nauch.-tehn. sb. Harkov: NTU «HPI», 2019. Vyp. 90. 188 s. S. 72-84.
7. Tretyak T., Gutsalenko Y., Mironenko A., Mironenko S. Research of quality indicators of non-evolvent gears. *Magyar Tudományos Journal (Budapest, Hungary)*. № 48 (2020). 52 p. P. 47-51.
8. Artobolevskij I.I. Teoriya mehanizmov i mashin: Uchebnik dlya vtuzov. M.: Nauka, 1988. 640 s.
9. Zablonckij K.I., Belokonev I.M., Shekin B.M. Teoriya mehanizmov i mashin: Uchebnik. K.: Visha shkola, 1989. 376 s.
10. Litvin F.L. Teoriya zubchatyh zaceplenij. M.: Nauka, 1968. 584s.
11. Perepelica B.A. Otobrazhenie affinnogo prostranstva v teorii formoobrazovaniya poverhnosti rezaniem. Harkov: Visha shk., 1981. 152 s.
12. Krivosheya A.V. Struktura mnogoparametricheskogo otobrazheniya, obobshayushaya stanochnye i rabochie zubchatye zacepleniya / A.V. Krivosheya // Vysokie tehnologii v mashinostroenii: modelirovanie, optimizaciya, diagnostika: Tezisy dokl. Harkov: HGPU, 1995. S. 71.
13. Komp'yuterna programa «Geometricheskoe modelirovanie kinematicheskikh krivyh» («LinesModel») / Tretyak T.Ye., Shelkovij O.M., Mironenko O.L., Mironenko S.O. Svidoctvo pro reyestraciyu avtorskogo prava na tvir № 118397 vid 24 kvitnya 2023 r.
14. Komp'yuterna programa «Issledovanie kachestvennyh pokazatelej neevolventnyh zubchatyh zaceplenij» («Gears») / Tretyak T.Ye., Shelkovij O.M., Mironenko O.L., Mironenko S.O. Svidoctvo pro reyestraciyu avtorskogo prava na tvir № 117622 vid 28 bereznya 2023 r.

Надійшла (received) 21.10.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Мironenko Сергій Олександрович (Myronenko Sergij) - аспірант кафедри інтегрованих технологій машинобудування ім. М.Ф. Семка (ІТМ), Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (НТУ «ХПІ»), м. Харків, Україна, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8076-459X>, e-mail: serg1prime@gmail.com.