

*В. Л. ХАВІН, Є. В. ХАВІН, Б. М. КИРКАЧ, О. Б. КИРКАЧ***ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У ШПИНДЕЛЬНИХ ВАЛАХ ПРИ РОЗРАХУНКУ ЖОРСТКОСТІ ОПОР ЗА МОДИФІКОВАНОЮ МОДЕЛЮ ДЖОНСА-ХАРРІСА**

В роботі запропоновано модель для визначення переміщень в багато опорних шпиндельних валах на нелінійно пружних опорах. Методом початкових параметрів в матричному вигляді отримано рішення задачі у вигляді системи рівнянь, в якій крім нелінійної залежності жорсткості підшипників від діючих на них зусиль, враховано ступінчасту геометрію шпиндельного валу. При розрахунку жорсткості опор застосовано багато параметричний підхід з фізично обґрунтованими характеристиками контакту елементів підшипників на базі модифікованої моделі Джонса-Харріса (МЖМ).

Запропонований метод і програмне забезпечення для вирішення нелінійної крайової задачі визначення переміщень в ступінчатих багато опорних шпиндельних валах з нелінійно пружними опорами реалізовано в середовищі MATLAB. Для розрахунку жорсткості нелінійно пружних опор застосовано модифіковану модель Джонса-Харріса.

Ключові слова: багато опорний ступінчастий шпиндельний вал, метод початкових параметрів, нелінійно пружні опори, модифікована модель Джонса-Харріса.

V. KHAVIN, E. KHAVIN, B. KYRKACH, O. KYRKACH**DETERMINATION OF DISPLACEMENTS IN SPINDLE SHAFTS DURING THE STIFFNESS CALCULATION OF SUPPORTS USING THE MODIFIED JONES-HARRIS MODEL**

The paper proposes a model for determining movements in multi-support spindle shafts on nonlinear elastic supports. Using the method of initial parameters in matrix form, the solution of the problem was obtained in the form of a system of equations, in which, in addition to the nonlinear dependence of the stiffness of the bearings on the forces acting on them, the stepped geometry of the spindle shaft was taken into account. When calculating the stiffness of the supports, a multi-parametric approach with physically based contact characteristics of the bearing elements based on the modified Jones-Harris model (MJHM) is applied.

The proposed method and software for solving the nonlinear boundary value problem of determining displacements in stepped multi-support spindle shafts with nonlinear elastic supports is implemented in the MATLAB environment. A modified Jones-Harris model was used to calculate the stiffness of nonlinear elastic supports.

Key words: multi-support stage spindle shaft, method of initial parameters, nonlinear elastic supports, modified Jones-Harris model.

Актуальність

Точність обробки деталей на металообробних верстатах залежить від величини пружних переміщень деталі і інструменту в зоні обробки. Характеристики жорсткості шпиндельного вузла безпосередньо визначають точність та стабільність процесу металообробки. Внаслідок цього, визначення переміщень для багато опорних шпиндельних валів відіграє важливу роль у забезпеченні точності роботи верстата.

Суттєвим фактором, який впливає на точність визначення переміщень, є нелінійна жорсткість підшипників шпиндельного валу. Для розрахунку переміщень в сучасних шпиндельних валах необхідно використовувати модель багато опорної балки на нелінійно пружних опорах, де розподіл реактивних опорних зусиль залежить від жорсткості опор, яка в свою чергу, нелінійно залежить від величини діючих реактивних зусиль. Підвищення якості розрахунку переміщень в шпиндельних валах залежить від рівня точності моделювання їх деформування шляхом впровадження багато параметричних підшипникових моделей з фізично обґрунтованими нелінійними характеристиками. Запропонована модель розрахунку дозволяє уточнити оцінку жорсткості опор до 50%.

Достовірний розрахунок жорсткості опор кочення у сукупності з універсальними підходами до вирішення задачі визначення переміщень для багато опорних шпиндельних валів дозволяє при проектуванні оптимізувати конструкцію шпиндельного вузла, визначивши оптимальну кількість опор, їх тип і положення.

Тому, разом з вдосконаленням відповідних експериментальних методів, актуальною є задача розробки ефективних теоретичних моделей і методів розрахунку переміщень багато опорних шпиндельних валів метало ріжучих верстатів для визначення їх пружних деформацій і жорсткості.

Постановка і метод рішення задачі. Аналіз літературних джерел. При проектуванні шпиндельного вузла важливу роль відіграє оцінка його жорсткості під дією зусиль різання і навантаження з боку привода.

В якості перших моделей для визначення переміщень приймалися пружні балки постійного поперечного перерізу на двох лінійно пружних опорах, які навантажувалися сконцентрованими силами [1,2]. У подальшому, приведення багато опорних ступінчатих валів до двохопорної моделі за рахунок введення спеціальних коефіцієнтів себе не виправдало [3].

Уточнення розрахунків з врахуванням конструктивних особливостей багато опорних ступінчатих шпиндельних валів проводилось чисельними методами, такими як MCE [4-13]. У більшості робіт цього напрямку застосовувалися програмні комплекси, здебільшого ANSYS. Такі комплекси потребують значних фінансових затрат на їх придбання, опанування та експлуатацію.

В роботі [14] запропоновано підхід до розрахунку згинальних переміщень багато опорних шпиндельних валів на основі метода початкових параметрів (МПП). У порівнянні з MCE, МПП має систему рівнянь меншого розміру і потребує меншого об'єму вхідних даних для вирішення задачі. В роботах [15-17] на основі МПП було розроблено універсальний підхід до статичного аналізу багато опорних шпиндельних валів з довільною кількістю опор і з врахуванням їх нелінійної жорсткості.

При статичному аналізі шпиндельних валів зазвичай використовуються довідникові середні значення жорсткості опор - підшипників кочення. Але жорсткість підшипників кочення істотно залежить від діючих на них сил, величини технологічних зазорів і попереднього затягування, теплових навантажень, посадок зовнішнього і внутрішнього кілець, що може дати похибку в оцінці жорсткості опори до 50 %. Сучасні нелінійні моделі підшипників засновані на врахуванні силової рівноваги контактуючих елементів підшипників, що деформуються в радіальному і осьовому напрямках. Відповідні процедури для кулькових і роликів підшипників є типовими, основна відмінність полягає в моделях розрахунку контактних переміщень.

В моделях розрахунку контактних переміщень шарикопідшипників використовується класичне рішення з точковим контактом по Герцу [18] і еліптичним контактом [19]. Найбільш відомими моделями для розрахунку жорсткості підшипників є моделі з одним і двома ступенями вільності [20-25]. Загальні чисельно-аналітичні рівняння для визначення контактних переміщень і характеристик жорсткості у моделях підшипників з одним і двома ступенями вільності були отримані в роботах [20-22] і розвинуті Де Мюлем з співавторами [26, 27] та ін. В останні десятиліття дослідниками використовувався числовий метод скінченних елементів (МСЕ), який при визначенні розподілу зусиль і переміщень більш точно враховує контактну взаємодію між елементами підшипника.

На основі моделі Герца Джонсом і Харрісом [20,22] було отримано аналітичні залежності для розрахунку нелінійних жорсткостей опор кочення, так звану модель Джонса-Харріса (JHM). У роботі [28] для радіальних шарикопідшипників був запропонований метод, названий модифікованим методом Джонса-Харріса (MJHM), який за рахунок застосування МСЕ дозволяє отримати більш точну чисельно-аналітичну модель. У роботах [29,30] для шарикових і роликів підшипників обґрунтована ефективність застосування модифікованої моделі Джонса-Харріса, що дозволяє отримати більш точну і відносно просту чисельно-аналітичну модель розрахунку нелінійної радіальної жорсткості підшипників.

Мета даної роботи – розробка підходу, математичної моделі і програмного забезпечення для визначення переміщень в багато опорних ступінчастих шпиндельних валів з нелінійно пружними опорами, для розрахунку жорсткості яких застосовується модифікована модель Джонса-Харріса.

Постановка задачі. При побудові розрахункової схеми і математичної моделі шпиндельного валу в даній роботі були використані гіпотези і положення, які наведені в роботі [17].

Розрахункова схема багато опорного шпиндельного валу (рис. 1,а). має M ділянок з шматковою постійною згинальною EI_m та зсувною жорсткістю GA_m , $m = 1,2,3, \dots, M$.

Кожен з N підшипників є пружною опорою з нелінійною жорсткістю C_n і реакцією R_n , $n = 1,2, \dots, N$. У площині yoz вал навантажується зусиллям та моментом різання F_{yc}, M_{xc} , а також зусиллям та моментом F_{yd}, M_{xd} з боку приводу.

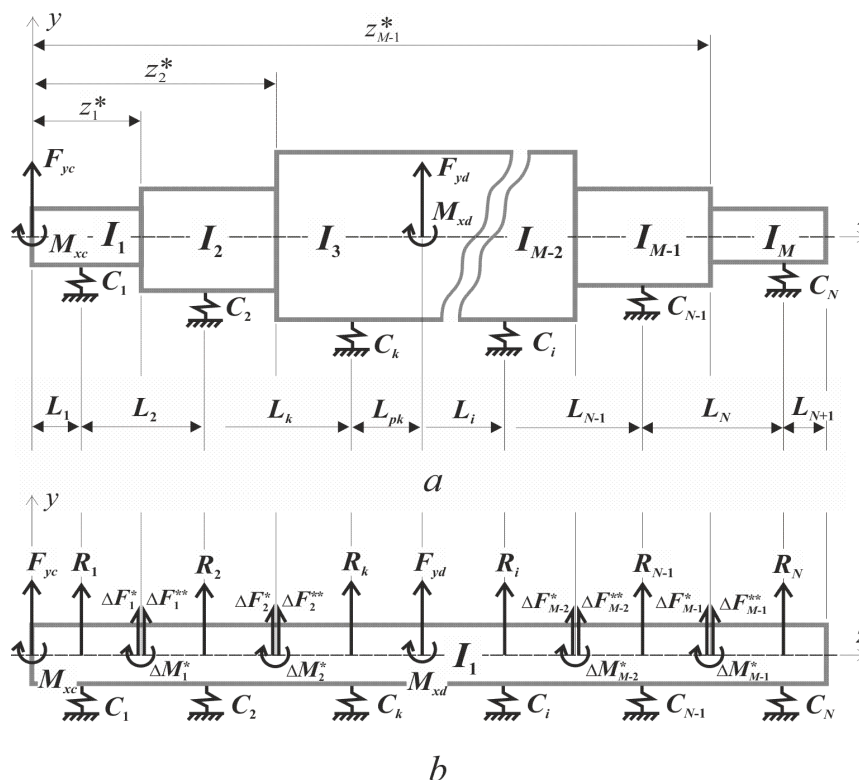


Рис. 1 – Розрахункова схема багато опорного ступінчастого шпиндельного валу

1. Метод рішення крайової задачі. Для моделювання згину шпindelного валу використовується модель балки Тимошенко, оскільки згинальна жорсткість ділянок валу співмірна з жорсткістю цих ділянок на зсув. У відповідності з цією моделлю рівняння зігнутою осі m -тої ділянки виглядає [19]:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI_m} - \frac{K_{tm}}{GA_m} \frac{dQ_y(z)}{dz}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

де z – поточна координата, $y(z)$ – функція прогину балки, E – модуль пружності, G – модуль зсуву, I_m, A_m – осьовий момент інерції та площа перерізу даної ділянки валу відповідно, $M_x(z), Q_y(z)$ – згинальний момент та поперечна сила відповідно в перерізі з координатою z , K_{tm} – коефіцієнт форми перерізу даної ділянки валу.

У даній роботі для розрахунку прогину використовується модифікований метод початкових параметрів [17]. Його основна відмінність від класичного МПП полягає в тому, що ступінчастий вал приводиться до еквівалентної по деформаціях балки постійного перерізу, розміри якого дорівнюють, наприклад, розмірам поперечного перерізу першої ділянки. Для забезпечення тотожності деформації початкового і еквівалентного валів внутрішні силові фактори останнього модифікуються за допомогою спеціальних коефіцієнтів приведення. Внаслідок цього рівняння (1) дещо змінюється і зберігає схожість з рівнянням зігнутої осі балки постійного поперечного перерізу, а саме

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{k_m^* M_x(z)}{EI_1} - \frac{K_{t1} k_m^{**}}{GA_1} \frac{dQ_y(z)}{dz}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

де I_1, A_1, K_{t1} – відповідно момент інерції, площа перерізу і коефіцієнт форми перерізу першої ділянки валу, $k_m^* = I_1/I_m$ – згинальний коефіцієнт приведення для m -ої ділянки валу, $k_m^{**} = K_{tm} A_1 / K_{t1} A$ – зсувний коефіцієнт приведення на тій же ділянці.

В граничних точках ділянок початкового валу, до еквівалентного валу треба прикласти додаткові згинальні моменти ΔM_m^* і поперечні зусилля ΔF_m^* (рис. 1b). Величини цих навантажень нескладно визначити за формулами

$$\Delta F_m^* = (k_{m+1}^* - k_m^*) Q_y(z_m^*), \quad \Delta M_m^* = (k_{m+1}^* - k_m^*) M_x(z_m^*), \quad (3)$$

де z_m^* – координата границі m -ої і $(m+1)$ -ої ділянок вала (див. рис. 1a), $m = 1, 2, \dots, M - 1$.

В додаток до цього, оскільки використовується модель балки Тимошенко, на границях ділянок еквівалентного валу слід прикласти додаткові поперечні сили, зв'язані з другим додатком (зсувом) у правій частині рівняння (2) (рис. 1b).

$$\Delta F_m^{**} = (k_{m+1}^{**} - k_m^{**}) Q_y(z_m^*), \quad m = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (4)$$

Після того, як усі навантаження на еквівалентний вал визначені, рішення диференціального рівняння (2) у відповідності до [17] має вигляд

$$y(z_i) = y_0 + \theta_0 z_i + \Phi(z_i), \quad \theta(z_i) = \theta_0 + \Phi^*(z_i), \quad (5)$$

де y_0 та θ_0 – відповідно прогин та кут повороту вала на початку координат, $\Phi(z_i), \Phi^*(z_i)$ – універсальні функції, які залежать від зовнішніх навантажень, z_i – локальна координата, яка завдається наступним чином,

$$\sum_{j=1}^{i-1} L_j \leq z_i \leq \sum_{j=1}^i L_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

Функції $\Phi(z_i)$ та $\Phi^*(z_i)$ з рішення (5) можна представити у виді

$$\begin{aligned} \Phi(z_i) &= \frac{\Phi_1(z_i)}{EI_1} - K_{t1} \frac{\Phi_2(z_i)}{GA_1}, \\ \Phi^*(z_i) &= \frac{\Phi_1^*(z_i)}{EI_1} - K_{t1} \frac{\Phi_2^*(z_i)}{GA_1}, \end{aligned} \quad (7)$$

При цьому $\Phi_1(z_i), \Phi_2(z_i), \Phi_1^*(z_i), \Phi_2^*(z_i)$ виражаються через зовнішні навантаження і наведено в роботі [17].

У залежностях (2)-(4) k_{mk}^* і k_{mk}^{**} – відповідно згинальний та зсувний коефіцієнти приведення для ділянки валу, на якій прикладаються зусилля від приводу, k_{ml}^* і k_{ml}^{**} – відповідно згинальний та зсувний коефіцієнти приведення для ділянки валу, на якій діє реактивне зусилля R_l .

На опорі з номером n прогин валу y_n пов'язаний з реакцією опори R_n та її жорсткістю C_n наступним співвідношенням:

$$R_n = -C_n y_n, \quad (8)$$

з якого, і з врахуванням формул (5) та (7), слідує умови поєднання на опорах

$$y_n = y_0 + \theta_0 z_n + \frac{\Phi_1(z_n)}{EI_1} - \frac{K_{t1}}{GA_1} \Phi_2(z_n) = -\frac{R_n}{C_n}, \quad (9)$$

$$z_n = \sum_{j=1}^n L_j, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

До рішення диференційного рівняння зігнутої осі валу (5) і умовам поєднання (9) слід додати умови статичної рівноваги – рівність нулю проекцій сил на вісь y і суми моментів сил відносно лівого кінця валу.

$$\sum_{n=1}^N R_n + F_{yc} + F_{yd} = 0 \quad (10)$$

$$\sum_{n=1}^N \left(R_n \sum_{j=1}^n L_j \right) + F_{yd} \left(\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k} \right) - M_{xc} - M_{xd} = 0 \quad (11)$$

Співвідношення (9) – (11) є системою з $(N+2)$ рівнянь для $(N+2)$ невідомих – реакцій опор $R_n, n = 1, 2, \dots, N$, а також прогину y_0 і кута повороту θ_0 перерізу вала на початку координат. Для визначення $\Phi_1(z_n)$ та $\Phi_2(z_n)$ в (9) використовуються залежності для $\Phi_1(z_i)$ і $\Phi_2(z_i)$ відповідно при заміні множини z_i на множину координат $z_n, n = 1, 2, \dots, N$. Рішення системи рівнянь (9)-(11) дає можливість визначити прогин та кут повороту довільного перерізу валу з врахуванням податливості його опор. Перехід від моделі балки Тимошенка до моделі балки Бернуллі здійснюється за допомогою занулення коефіцієнта форми перерізу K_{t1} та зсувних коефіцієнтів приведення $k_{m}^{**}, m = 1, 2, \dots, M$.

У разі, якщо жорсткості опор є постійними, тобто $C_n = \text{const}, n = 1, 2, \dots, N$, крайова задача (9)-(11) лінійна і вирішується порівняно просто, за один крок. У даній роботі враховується змінна жорсткість підшипників в залежності від реактивних зусиль, тобто $C_n = C_n(R_n), n = 1, 2, \dots, N$. В такому разі система рівнянь (9)-(11) є нелінійною і повинна вирішуватись в ітераційному процесі з відповідним контролем збіжності.

2. Визначення жорсткості опор. Аналіз літератури з розрахунку пружних характеристик підшипників кочення [22,24,32-34] показує, що, навіть без урахування впливу технологічних зазорів і посадки на вал, жорсткість підшипників суттєво нелінійна. Залежність абсолютної деформації підшипника по напрямку діючої сили внаслідок контактної взаємодії конструктивних елементів носить нелінійний характер, а технологічні зазори і посадка підшипника на вал ускладнюють характер нелінійності.

Для розрахунку жорсткості опор застосовуються статичні моделі, в яких для визначення радіальної деформації підшипника, як правило, розглядається деформація навантаженого елемента кочення. Контакт розглядається в рамках теорії Герца для напівнескінчених криволінійних контактних поверхонь з пружним тілом кочення. Це дозволяє отримати наведені нелінійні відносини, що зв'язують зближення контактуючих поверхонь з зусиллям, що діє на підшипник. Відносини формуються або у дискретному вигляді за рахунок врахування кінцевого числа навантажених тіл кочення або в безперервній, інтегральній формі, при розподілі жорсткості (зусиль) по довж навантаженої зони шляхом введення інтегрального коефіцієнта розподілу навантаження. У всіх моделях розподілу зусиль можна враховувати зазор у підшипнику і додаткові фактори (швидкість обертання, посадку кілець та ін.).

Для статичних інженерних моделей розрахунку жорсткості підшипників в рамках теорії контакту Герца були використані гіпотези і положення, які наведено в роботі [29].

В усіх інженерних чисельно-аналітичних квазістатичних моделях підшипників узагальнююча залежність між силою і переміщенням в контакті тіла кочення з обіймами (кільцями) підшипника представляється у вигляді:

$$Q = K \delta^m \quad (12)$$

де Q – нормальне зусилля, що діє на тіло кочення, K – характеристика жорсткості, δ – нормальне переміщення, m – показник нелінійності.

Контактне зусилля Q_n (обумовлене рівновагою) однакове для внутрішнього (Q_i) і зовнішнього (Q_e) кілець:

$$Q_i = Q_e = Q_n \quad (13)$$

Повне радіальне контактне переміщення внутрішнього кільця по відношенню до зовнішнього кільця в нормальному напрямку відносно доріжок кочення визначається співвідношенням:

$$\delta_n = \delta_i + \delta_e \quad (14)$$

де δ_i і δ_e – абсолютні контактні деформації в контакті тіла кочення з внутрішнім і зовнішнім кільцями відповідно.

Згідно (12) – (14) для окремого тіла кочення, що контактує з внутрішнім і зовнішнім кільцями, має місце співвідношення:

$$Q_n = K_n \delta_n^m, \quad (15)$$

де результуюча характеристика жорсткості визначається залежністю:

$$K_n = \left[\frac{1}{(1/K_i)^{1/m} + (1/K_e)^{1/m}} \right]^m \quad (16)$$

У цьому виразі K_i і K_e – характеристики жорсткості контакту тіла кочення з внутрішнім і зовнішнім кільцем підшипника відповідно. Характеристики жорсткості залежать від матеріалу тіла кочення і кілець, діаметра тіла кочення D , конфігурації доріжок кочення, наявності тертя і мастила та ін. Характеристики жорсткості визначаються шляхом рішення відповідної контактної задачі. Спосіб формування характеристик жорсткості в залежності (16) і розрізняє чисельно-аналітичні моделі і визначає рівень їх коректності.

На основі експериментальних досліджень, шляхом введення додаткових гіпотез при рішенні контактних задач і використання однієї з моделей розподілу зусиль по елементах кочення, був запропонований ряд інженерних формул для розрахунку характеристик жорсткості радіальних та радіально-упорних шарикопідшипників [20-22,35-37].

Узагальнення отриманих в роботах [20-22,35-37] відношень дозволяє сформувати універсальну структуру залежностей, які для радіальних та радіально-упорних підшипників зв'язують радіальне переміщення внутрішньої обойми по відношенню до зовнішньої обойми з поточним зовнішнім зусиллям:

$$\begin{aligned} F_r &= K_{\delta r} \delta_r^m, \\ \delta_r &= K_{F_r} F_r^{\frac{1}{m}} \end{aligned} \quad (17)$$

де F_r – зовнішнє радіальне зусилля, що діє на підшипник, δ_r – радіальне переміщення внутрішнього кільця по відношенню до зовнішнього в напрямку зовнішнього зусилля, m – показник не лінійності, K_{F_r} , $K_{\delta r}$ – характеристики радіальної жорсткості підшипника, для яких мають місце узагальнені залежності [20 – 22, 35 – 37].

$$\begin{aligned} K_{F_r} &= P_r d^{n_1} Z^{n_2} (\cos \alpha)^{n_3} \\ K_{\delta r} &= K_{F_r}^{-n} \\ K_{F_r} &= P_r d^{n_1} Z^{n_2} (\cos \alpha)^{n_3}, \\ K_{\delta r} &= K_{F_r}^{-n} = P_r^{-m} d^{-mn_1} Z^{-mn_2} (\cos \alpha)^{-mn_3} \end{aligned} \quad (18)$$

де P_r – чисельний коефіцієнт, d – діаметр тіла кочення, Z – кількість елементів кочення, α – кут контакту в радіально-упорних підшипниках ($\alpha = 0$ для радіальних підшипників).

В рамках додаткових гіпотез, які спрощують використання напівемпіричних методів вирішення задач пружного контакту тіл кочення з контактними поверхнями, в роботах [20-23,35-37] отримано параметри характеристик радіальної жорсткості для залежностей (24),(25), що зв'язують зближення контактуючих поверхонь з зусиллям, діючим на підшипник. Чисельні значення параметрів наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 – Параметри характеристик радіальної жорсткості підшипників без урахування зазору для відомих класичних залежностей

Автор	Параметри характеристик жорсткості				
	n	n_1	n_2	n_3	$P_r, \frac{MM}{H^{1/n}}$
Гарджуліо, [37]	1,5	-1/3	-2/3	-5/3	$1,275 \cdot 10^{-3}$
Хуперт, [36]	1,5	-1/3	-2/3	-5/3	$1,81 \cdot 10^{-3}$
Палмгрен-Джонс- Харріс, [20-23]	1,5	-1/3	-2/3	-5/3	$1,27 \cdot 10^{-3}$

де $\varepsilon = \left(\frac{1+\bar{k}}{\bar{k}}\right)^{0,23} \frac{n}{MM^n}$, $\bar{k}$ – коефіцієнт осциляції.

Через нелінійну залежність деформації δ_r від зовнішнього зусилля, значення жорсткості підшипників кочення для певного значення зусилля можна отримати як «січну» або «дотичну» жорсткість.

Із загального співвідношення для «січної» жорсткості

$$C_r = F_r / \delta_r, \quad (19)$$

вираз для «січної» жорсткості можна отримати з врахуванням діючого радіального зусилля (17):

$$C_r = K_{Fr}^{-1} F_r^{\frac{m-1}{m}}. \quad (20)$$

Для радіально-упорних шарикопідшипників значення початкового кута контакту α дещо змінюється в залежності від величини сили, що діє на підшипник, і визначається спеціальним розрахунком [24]. «Дотична» жорсткість визначається похідною і має вигляд:

$$C_r^* = dF_r / d\delta_r = m K_{Fr}^{-1} F_r^{\frac{m-1}{m}}. \quad (21)$$

Вирази (20), (21) є узагальненими нелінійними залежностями для «січної» і «дотичної» жорсткості шарикопідшипників кочення. Значення констант для характеристики радіальної жорсткості в (20), (21) наведено в таблиці 1.

Аналіз даних з таблиці 1 показує значну схожість результатів у розглянутих моделях. Найвідомішою і популярною є модель, яка називається моделлю (методом) Джонса-Харріса, чи JHM–моделлю. Для статичного розподілу зусиль між тілами кочення в JHM–моделі використані залежності, отримані Стрибеком [38] за допомогою інтеграла Сяволла [39] без урахування і з урахуванням технологічного зазору в підшипнику [20-23].

У роботі [28] запропоновано, а в [29,30] застосовано модифікований метод Джонса-Харріса (MJHM), де, на відміну від JHM – моделі, для розрахунку характеристик жорсткості контакту тіла кочення з внутрішнім і зовнішнім кільцем підшипника K_i і K_e використовується не чисельно-аналітична модель контакту по Герцу, а скінчено-елементні періодичні моделі [28], що складаються з двох півкуль (половина тіла кочення), що контактують кожна окремо з 1/Z-й частиною внутрішнього та зовнішнього кільця підшипника відповідно.

Скінчено-елементні моделі, що використовуються для визначення характеристик жорсткості в контакті елемент кочення – підшипникові кільця, більш точно відображають фактичну геометрію і жорсткість зовнішньої і внутрішньої доріжок кочення підшипника.

Експерименти підтвердили, що результати MJHM при визначенні жорсткості точніші, ніж результати, отримані методом JHM [28] і практично узгоджуються з результатами, отриманими при моделюванні деформацій підшипника «в цілому» методом скінчених елементів.

Робочий і комп'ютерний час, необхідний при використанні МЖМ, помітно менше, ніж при використанні для розрахунку жорсткості МСЕ для підшипника в цілому. Також застосування моделі МЖМ дає можливість при незначних обчислювальних трудовитратах отримати сімейство кривих для підшипника, що характеризують залежність його радіальної жорсткості від зовнішнього зусилля і швидкості обертання, що забезпечить інженерний розрахунок жорсткостей з досить високою точністю.

У моделі МЖМ, як і в моделі ЖМ, зв'язок між радіальною деформацією підшипника δ_r , що визначається на найбільш навантаженій кульці, та зовнішньою радіальною силою F_r по аналогії з (17) задається виразом:

$$\delta_r = K_{Fr}^{\circ} F_r^{1/m}, \quad (22)$$

де K_{Fr}° – характеристика жорсткості, що залежить від пружних властивостей матеріалів контактуючих тіл і геометрії контакту (діаметра кульок, діаметрів і кривизни доріжок кочення). У моделі МЖМ коефіцієнт K_{Fr}° в (22) відповідає коефіцієнту K_{Fr} в (17) в ЖМ – моделі і визначається методом скінченних елементів розрахунком для кожного типорозміру підшипника, а жорсткості розраховуються за залежностями (20), (21) з заміною K_{Fr} на K_{Fr}° .

Результати розрахунку жорсткості підшипника фірми SKF марки 6201, що наведено в [28], показують невідповідність з експериментальними даними до 40 – 50% для моделі ЖМ і 3 – 12% для моделі МЖМ, а показник нелінійності для МЖМ дорівнює $m=1,3$ на відміну від $m=1,5$ в ЖМ – моделі. Також аналіз чисельних результатів, представлених в [28], показує, що використання моделі МЖМ дає підвищення точності розрахунку жорсткості на 20 - 40% для серії радіальних підшипників фірми SKF в порівнянні з ЖМ – моделлю.

В даній роботі змінна жорсткість $C_n = C_n(R_n)$ опор-підшипників розраховується в залежності від значень реактивних зусиль з використанням МЖМ-моделі. Нелінійна система рівнянь (9)-(11) вирішувалась в ітераційному процесі з відповідним контролем збіжності.

Рішення системи рівнянь. Для чисельного рішення система рівнянь (9)-(11) записується у матричному вигляді

$$AX = B, \quad (23)$$

де $A = [a_{ij}]_{(N+2) \times (N+2)}$ – матриця коефіцієнтів при невідомих, $B = \{b_i\}_{N+2}$ – вектор правих частин, $X = \{y_0, \theta_0, R_1, R_2, \dots, R_N\}^T$ – вектор невідомих, який включає початкові параметри і реакції опор. Коефіцієнти матриці A і компоненти вектора B отримано в роботі [17].

Для рішення нелінійної системи рівнянь (23) використовувався ітераційний процес, запропонований у [15,16]:

Крок 1. Задається початковий набір жорсткостей опор $C_{n0}, n = 1, 2, \dots, N$, і підраховуються елементи матриці системи рівнянь та вектора правих частин.

Крок 2. Вирішується система лінійних алгебраїчних рівнянь (23) і визначається початковий набір реактивних зусиль $R_{n1}, n = 1, 2, \dots, N$.

Крок 3. По відповідним залежностям $C_{n1} = C_n(R_{n1}), n = 1, 2, \dots, N$, вираховується новий набір жорсткостей опор та перераховуються коефіцієнти матриці системи рівнянь і вектора правих частин.

Крок 4. Знову вирішується система лінійних алгебраїчних рівнянь (23) і визначається новий набір реактивних зусиль, $R_{n1}, n = 1, 2, \dots, N$. Після чого здійснюється повернення до кроку 3.

Кроки 3 та 4 виконуються циклічно доти, поки не буде досягнута задана точність, яка оцінюється по приросту жорсткостей і (або) реактивних зусиль.

Запропонований ітераційний процес застосовано в [16] у вигляді метода послідовних ітерацій (МПІ) сумісно з моделлю «січної» жорсткості і метода послідовних навантажень (МПН) сумісно з моделлю «дотичної» жорсткості.

При значній кількості опор при врахуванні нелінійної жорсткості підшипників реалізація цього алгоритму є трудомісткою задачею. Тому необхідним етапом даної роботи була реалізація запропонованої моделі і алгоритму у вигляді програми у середовищі MATLAB.

Результати розрахунків переміщень для багато опорного валу. Розроблений підхід було застосовано до розрахунку пружних переміщень шпиндельного валу фрезерувального верстату з роботи [17], геометрія та розрахункова схема якого подані на рис.2.

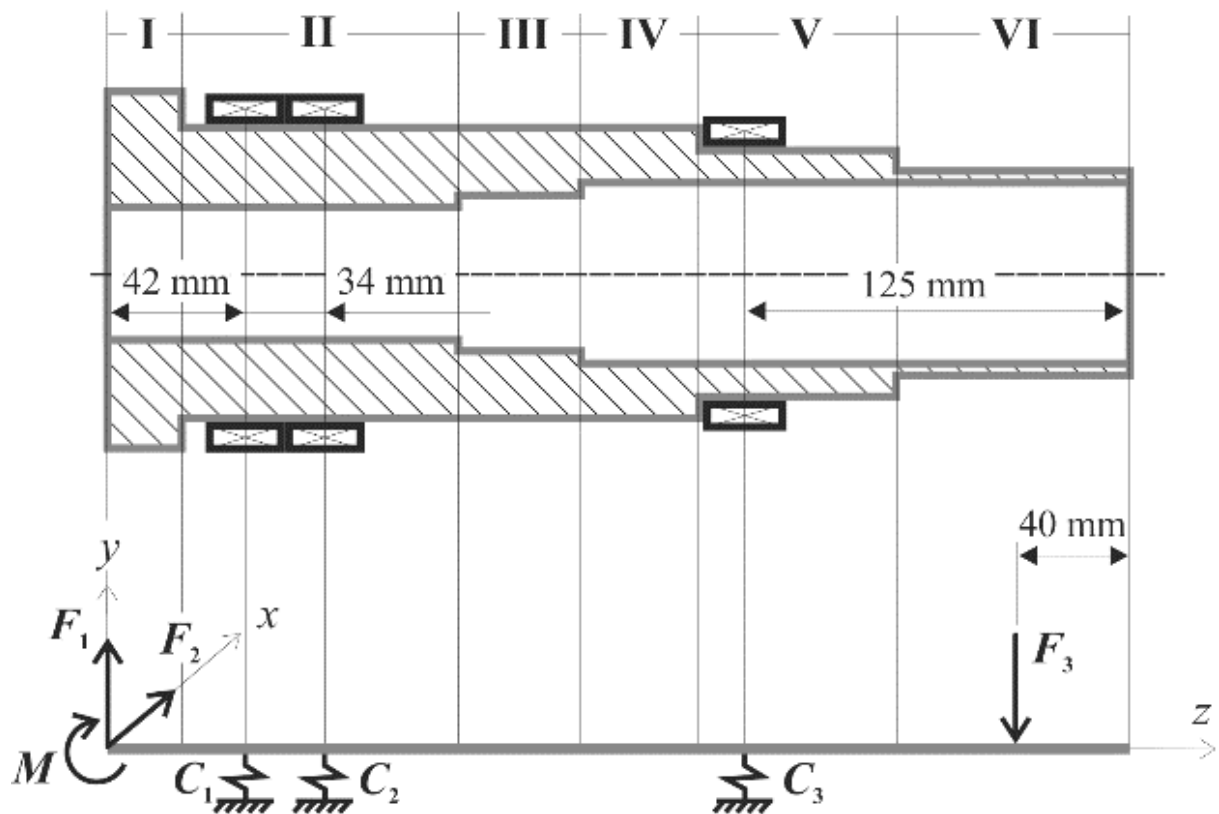


Рис. 2 – Шпиндельний вал фрезерувального верстату

Вал має 6 ділянок різної жорсткості, які пронумеровані римськими цифрами. Геометричні параметри та жорсткості ділянок приведені в таблиці 2, коефіцієнт форми перерізу для усіх ділянок валу приймається однаковим - $K_f = 2$ (кільце).

Зовнішнє навантаження складається з сил різання $F_1 = 10^3 \text{ N}$, $F_2 = 600 \text{ N}$, моменту різання $M = 50 \text{ Nm}$, а також зусилля від приводу $F_3 = 300 \text{ N}$.

Навантаження F_1 , F_3 та M , як показано на рис. 2, згинають вал у площині yz , а сила F_2 - у площині xz .

Таблиця 2 – Параметри ділянок валу

№	$D_{\text{зовн}}$ mm	$d_{\text{внутр}}$, mm	Довжина L , mm	EI_i , $\text{Nm}^2 \cdot 10^{-5}$	GA_i , $\text{N} \cdot 10^{-8}$
I	130	60	15	29,4	8.32
II	100	60	79	8,97	4,02
III	100	65	105	8,59	3,63
IV	100	75	83	7,06	2,75
V	90	75	57	3,51	1,55
VI	80	75	85	0,953	0,487

Передня опора валу є парою радіальних шарикопідшипників марки SKF 6220, розташованих впритул один до одного. У якості задньої опори використовується одинарний шарикопідшипник марки SKF 6220. Технічні

дані підшипника і характеристики жорсткості наведено в таблиці 3, також в таблиці наведено номінальну жорсткість шарикопідшипника SKF 6220, C_{n0} , яку отримано з довідникової літератури [40].

Таблиця 3– Характеристики підшипника

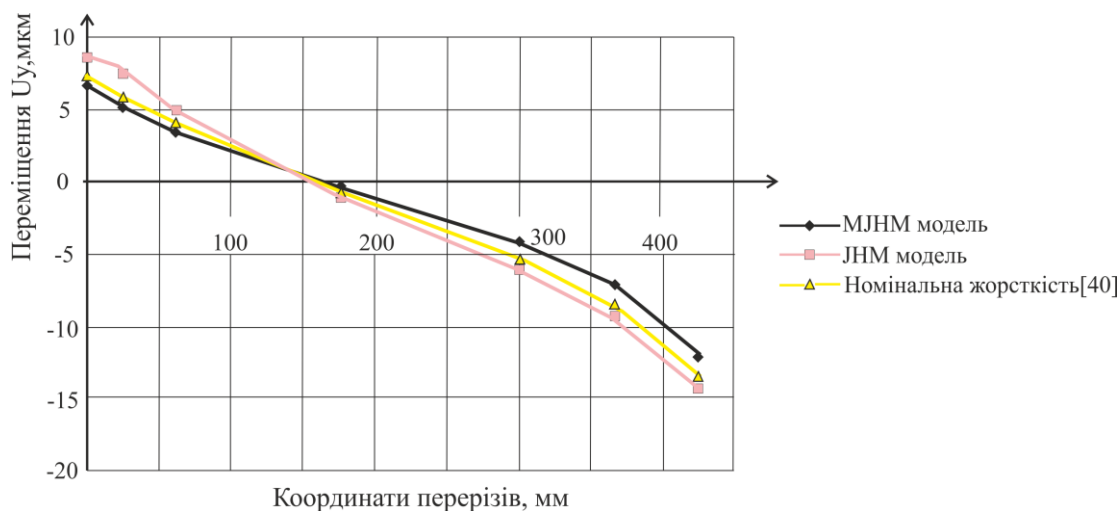
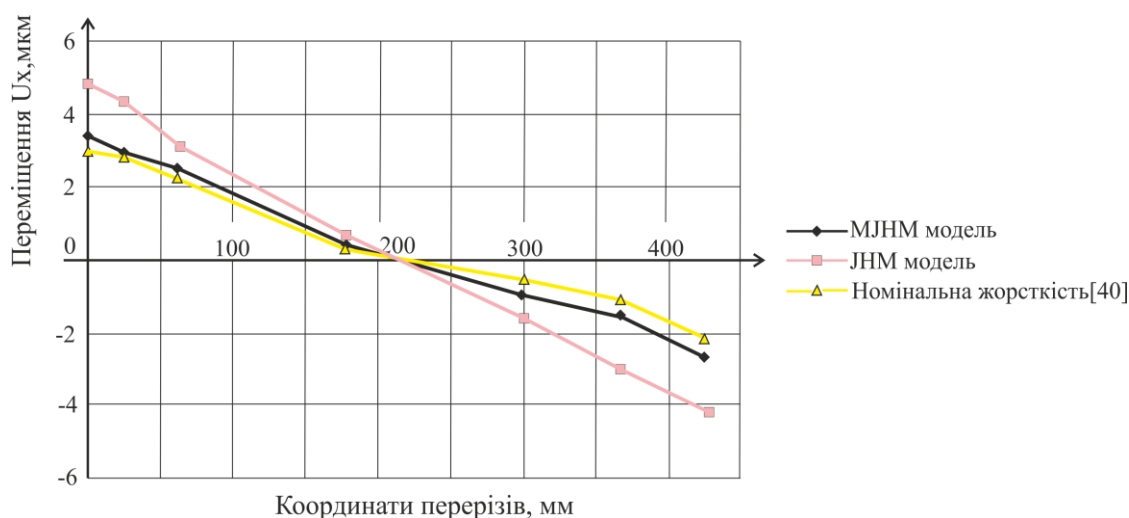
Марка	$D_{зовн}$ mm	$d_{вн.}$ mm	Ширина B , mm	Число шариків Z	Діаметр шаріка d_0 , mm	Показник нелінійності [29]	Характеристики жорсткості [29] (н/мкм)
SKF-6220	180	100	34	14	24	МЛНМ-модель $m = 1,3$ ЛНМ-модель $m = 1,5$	МЛНМ-модель $K_{Fr}^o = 0,3 \cdot 10^{-4}$ J ЛНМ-модель $K_{Fr} = 0,758 \cdot 10^{-4}$ По стійна жорсткість опор $C_{n0} = 1,4 \cdot 10^5$

В таблиці 4 приведені результати статичного розрахунку переміщень перерізів валу u_x та u_y , у напрямку осей x і y відповідно, в залежності від осьовій координати z при застосуванні для розрахунку жорсткостей опор розглянутих моделей.

Дані таблиці 4 наведено на рис.3,4 у вигляді графіків, де представлено результати розрахунку переміщень при застосуванні для моделювання жорсткості опор моделей з таблиці 3.

Таблиця 4 – Поперечні переміщення перерізів валу

z, mm	0	12,5	25	42	59	179	299	361	424
МЛНМ-модель u_y, mkt	6,82	6,17	5,47	4,65	3,84	-0,688	-4,680	-7,77	-11,8
МЛНМ-модель u_x, mkt	3,5	3,26	2,99	2,66	2,35	0,567	-1,0	-1,86	-2,72
ЛНМ-модель u_y, mkt	8,61	7,83	7,0	6,0	5,02	-0,787	-6,06	-9,82	-14,5
ЛНМ-модель u_x, mkt	4,82	4,5	4,15	3,72	3,3	0,757	-1,58	-2,83	-4,08
Номінальна довідкова жорсткість [40] u_y, mkt	7,43	6,74	5,99	5,17	4,22	-0,745	-5,17	-8,48	-12,7
Номінальна довідкова жорсткість [40] u_x, mkt	3,19	2,98	2,73	2,44	2,16	0,636	-0,66	-1,39	-2,1

Рис. 3 – Переміщення U_y Рис. 4– Переміщення U_x

Аналіз результатів показує, що порівняно з класичною моделлю Джонса-Харріса, застосування її модифікованої моделі дозволяє уточнити переміщення робочого кінцевого перерізу шпиндельного валу фрезерного верстата на 25%. Слід зазначити, що в даному випадку застосування середньої довідникової жорсткості для даного рівня діючих зусиль і типу підшипників дозволяє отримати для статичних переміщень даного валу достатньо коректне рішення, яке відрізняється від рішення з опорами модифікованої нелінійної жорсткості на 7-15%.

Висновки.

В роботі запропонований універсальний підхід і математична модель для визначення переміщень в багато опорних ступінчастих шпиндельних валах на нелінійно пружних опорах, для розрахунку жорсткості яких застосовується модифікована модель Джонса-Харріса.

Засобами пакету MATLAB розроблено програмне забезпечення, яке дозволяє за короткий проміжок часу провести аналіз переміщень при просторовому згинанні ступінчастих шпиндельних валів, нелінійна жорсткість яких розраховується по модифікованій моделі Джонса-Харріса.

Проведено розрахунки пружних переміщень 3-х опорного шпиндельного валу фрезерувального верстату. Результати розрахунків показали, що порівняно з результатами, які отримано при застосуванні класичної моделі Джонса-Харріса, застосування її модифікованої моделі дозволяє уточнити переміщення робочого кінцевого перерізу шпиндельного валу фрезерного верстата на 25%.

Список літератури

1. Решетов Д. Н. Расчет валов (шпинделей) с учетом упругого взаимодействия их с опорами. – М.: Машгиз, 1939. – 75 с.
2. L. Lewinthal, "Machine Tool Spindle Applications", SKF Industries Inc. Engineering and Research, SKF Norden, Feb 1983.
3. K.J.H. Shareef, J.A. Brandon, "On the quasi-static design of machine tool spindles", Journal of Engineering Manufacture, vol. 204, 1990, pp. 91-104.
4. Y. Cao, Y. Altintas, "A general method for the modelling of spindle-bearing systems", J. Mech. Des. Transactions of the ASME, vol. 126, 2007.
5. D. Liu, H. Zhang, Z. Tao, Y. Su, "Finite element analysis of high-speed motorized spindle based on ANSYS", The Open Mechanical Engineering Journal, vol. 5, 2011, pp. 1-10.
6. H. Sun, G. Yin, L. Mi, Y. Yin, "Study on the design and analysis of spindle system of NC machine tools based on digital design", Key Engineering Materials, vol. 522, 2012, pp. 668-672.
7. H. Cao, B. Li, Z. He, "Finite element model updating of machine-tool spindle systems", Journal of Vibration and Acoustics, vol. 135, 2013.
8. S. Shivakumar, A.N. Kallol, V. Khadakhbavi, "Analysis of lathe spindle using ANSYS", Int. J. Sci. & Eng. Res., vol. 4(9), 2013, pp. 431-440.
9. A. Telang, "Static stiffness analysis of high frequency milling spindle", Int. J. Res. Eng. Tech. (IJRET), vol. 3(3), 2014, pp. 577-585.
10. Hareesha, "Static and dynamic analysis of a CNC milling spindle", Int. Res. J. Eng. Tech. (IRJET), vol. 2(7), 2015, pp. 222-228.
11. N.L. Carutasu, "Virtual simulation for static behavior of the main spindle assembly of a horizontal drilling and milling CNC machining with a high-speed cutting", Annals of the ORADEA University, vol. XXV(XV), 2016.
12. A. Anand, H. Roy, "Static and dynamic analysis of lathe spindle using ANSYS", Int. J. Appl. Eng. Res., vol. 13(9), 2018, pp. 6994-7000
13. J. Premkumar, V.M. Kumar, K. Theenathayalan, "Design and analysis of boring bar using ANSYS", Int. J. Tech. Res. Eng. (IJTRE), vol. 5(11), 2018, pp. 4584-4587.
14. Чернявский П.М. Жесткость металлорежущих станков: Учебное пособие. М.: изд. МВТУ, 1969, 20с.
15. O. Kyrkach, V. Khavin, I. Khavina, "A computational technique for the static analysis of multi-support spindle shafts with nonlinear elastic bearings", Proceedings of 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology Conference, Kharkiv, Ukraine, 5-10 Oct. 2020, pp. 402-406.
16. В.Л. Хавін, О.Б. Киркач, Б.Н. Киркач "Статичний аналіз багатоопорних шпиндельних валів на нелінійно пружних опорах". Вісник НТУ "ХПІ" №2, 2021р., с.94-100. Сер. "Динаміка та міцність машин".
17. В.Л. Хавін, О.Б. Киркач, Б.Н. Киркач "Статичний аналіз багатоопорних ступінчатих шпиндельних валів на нелінійно пружних опорах". Вісник НТУ "ХПІ" № 2, 2022р. с. 48-55. Сер. "Динаміка та міцність машин". DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270866
18. Hertz H. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.*, 1881, vol. 92, pp. 156-171.
19. Timoshenko G. Theory of elasticity. McGraw-Hill, 1970. 608 p.
20. Jones, A. B. (1960), "A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings," *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, **82**, pp 309-320.
21. Palmgren A. Ball and Roller Bearing Engineering. SKF Industries Inc., Philadelphia, 1959.
22. Harris, T. A. (1966), *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley.
23. Gargiulo, E.P., Jr., A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness, Machine Design, 1980, pp.107-110
24. Kovalev M.P., Narodetskiy M.Z. Raschet vysokotochnykh sharikopodshipnikov [Calculation of high-precision ball bearings]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 280 p.
25. Perel' L.Ya., Filatov A.A. Podshipniki kacheniya: raschet, proektirovanie i obsluzhivanie opor [Ball bearings: calculation, engineering and supports maintenance]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 608.
26. De Mul J., Vree J., Maas D. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part I: General theory and application to ball bearings // Journal of Tribology. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 142-148.
27. De Mul J.M., Vre J.M.e, Maas D.A. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part II: Application to roller bearings and experimental verification // Journal of Tribology. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 149-155.
28. Yuan Kanga, Ping-Chen Shen, Chih-Ching Huangc, Shyh-Shyong Shyrc, Yeon-Pun Chang "A Modification of the Jones- Harris Method for Deep-Groove Ball Bearings," *Tribology International*, Vol. 39, No. 11, 2006, pp. 1413-1420. <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2005.12.005>.
29. В.Л.Хавін, Б.М.Киркач, С.Ю.Погорілов, С.Ю.Шергін, Ефективна модель розрахунку нелінійної жорсткості шарикопідшипників. Вісник НТУ «ХПІ», 2023.–№1(7).– сс.82-93
30. Хавін В.Л., Киркач Б.М., Шергін С.Ю. Вдосконалена інженерна модель розрахунку радіальної жорсткості роликових підшипників // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Технології в машинобудуванні = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Techniques in a machine University "KhPI": зб. наук.пр. Харків : НТУ «ХПІ», 2023. № 2 (8) 2023. – С. –140-149. ISSN 2079-004X. DOI: 10.20998/2079-004X.2023.2(8).07.
31. M.D. White, "Timoshenko beam theory with modelling applications", University of Waterloo, 1994.
32. T. Hentati, F. Dammak, T. Fakhfakh, M. Haddar, "A finite element development for ball bearing nonlinear stiffness modelization", Int. J. Simul. Model., vol. 4(3), 2005, pp. 118-128.
33. Y. Zhang, G. Sun, T.C. Lim, L. Xie, "A fast and reliable numerical method for analyzing loaded rolling element bearing displacement and stiffness", JVE Journal of Vibroengineering, vol. 17(2), 2015, pp. 620-642.
34. V.-C. Tong, S.-W. Hong, "Study of stiffness of cylindrical roller bearings under combined radial and moment loads", Int. J. Mech. Prod. Eng., vol. 5(1), 2017, pp. 28-31.
35. Rijnberg, J. L. (2007). Theoretical modeling of the stiffness of angular contact ball bearings using a two DOF and a five DOF approach. (DCT rapporten; Vol. 2007.129). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven
36. Houpert, L. 1997. A Uniform Analytical Approach for Ball and Roller Bearing Calculations. Journal of Tribology, Vol. 119, pp. 851-858.
- 37 Gargiulo, E.P., Jr., A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness, Machine Design, 1980, pp.107-110.
38. R. Stribeck, "Ball Bearings for Various Loads," *Transactions of the ASME*, Vol. 29, 1907, pp. 420-463.
39. H. Sjoval, "The Load Distribution within Ball and Roller Bearings under Given External Radial and Axial Load," *TekniskTidskrift, Mek.*, h.9, 1933.
40. L.A. Kolesnikov, "Issledovanie staticheskikh i dinamicheskikh harakteristik shpindel'nyh uzlov stankov pri avtomatizirovannom proektirovanii", Minsk, BNTU, 2017, 55s.

References (transliterated)

1. D.N. Reshetov, "Raschet valov (shpindelej) s uchetoм uprugogo vzaimodejstviya ih s oporami", Mashgiz, 1939 75с.
2. L. Lewinthal, "Machine Tool Spindle Applications", SKF Industries Inc. Engineering and Research, SKF Norden, Feb 1983.
3. K.J.H. Shareef, J.A. Brandon, "On the quasi-static design of machine tool spindies", Journal of Engineering Manufacture, vol. 204, 1990, pp. 91-104.
4. Y. Cao, Y. Altintas, "A general method for the modelling of spindle-bearing systems", J. Mech. Des. Transactions of the ASME, vol. 126, 2007.

5. D. Liu, H. Zhang, Z. Tao, Y. Su, "Finite element analysis of high-speed motorized spindle based on ANSYS", The Open Mechanical Engineering Journal, vol. 5, 2011, pp. 1-10.
6. H. Sun, G. Yin, L. Mi, Y. Yin, "Study on the design and analysis of spindle system of NC machine tools based on digital design", Key Engineering Materials, vol. 522, 2012, pp. 668-672.
7. H. Cao, B. Li, Z. He, "Finite element model updating of machine-tool spindle systems", Journal of Vibration and Acoustics, vol. 135, 2013.
8. S. Shivakumar, A.N. Kallol, V. Khadakhbavi, "Analysis of lathe spindle using ANSYS", Int. J. Sci. & Eng. Res., vol. 4(9), 2013, pp. 431-440.
9. A. Telang, "Static stiffness analysis of high frequency milling spindle", Int. J. Res. Eng. Tech. (IJRET), vol. 3(3), 2014, pp. 577-585.
10. Hareesha, "Static and dynamic analysis of a CNC milling spindle", Int. Res. J. Eng. Tech. (IRJET), vol. 2(7), 2015, pp. 222-228.
11. N.L. Carutasu, "Virtual simulation for static behavior of the main spindle assembly of a horizontal drilling and milling CNC machining with a high-speed cutting", Annals of the ORADEA University, vol. XXV(XV), 2016.
12. A. Anand, H. Roy, "Static and dynamic analysis of lathe spindle using ANSYS", Int. J. Appl. Eng. Res., vol. 13(9), 2018, pp. 6994-7000.
13. J. Premkumar, V.M. Kumar, K. Theenathayalan, "Design and analysis of boring bar using ANSYS", Int. J. Tech. Res. Eng. (IJTRE), vol. 5(11), 2018, pp. 4584-4587.
14. Chernyavsky'j P.M. Zhestkost' metallovezhushhy'x stankov: Uchebnoe posoby'e. M.: y'zd. MVTU, 1969, 20s.
15. O. Kyrkach, V. Khavin, I. Khavina, "A computational technique for the static analysis of multi-support spindle shafts with nonlinear elastic bearings", Proceedings of 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology Conference, Kharkiv, Ukraine, 5-10 Oct. 2020, pp. 402-406.
16. V.L. Khavin, O.B. Kyrkach, B.N. Kyrkach. Statychnyi analiz bahatopornykh shpyndelnykh valiv na neliiniino pruzhnykh oporakh [Static analysis of multi-support spindle shafts on nonlinear elastic supports]. Visnyk NTU "KhPI" – Bulletin of the NTU "KhPI", no. 2, 2021, pp. 94–100. Ser. "Dynamika ta mitsnist mashyn" – Series: "Dynamics and Strength of Machines".
17. V.L. Khavin, O.B. Kyrkach, B.N. Kyrkach. Statychnyi analiz bahatopornykh stupinchastykh shpyndelnykh valiv na neliiniino pruzhnykh oporakh [Static analysis of multi-support stepped spindle shafts on nonlinear elastic supports]. Visnyk NTU "KhPI" – Bulletin of the NTU "KhPI", no. 2, 2022, pp. 48–55. Ser. "Dynamika ta mitsnist mashyn" – Series: "Dynamics and Strength of Machines". DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270866
18. Hertz H. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.*, 1881, vol. 92, pp. 156–171.
19. Timoshenko G. Theory of elasticity. McGraw-Hill, 1970. 608 p.
20. Jones, A. B. (1960), "A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings," *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82, pp 309-320.
21. Palmgren A. Ball and Roller Bearing Engineering. SKF Industries Inc., Philadelphia, 1959.
22. Harris, T. A. (1966), *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley.
23. Gargiulo, E.P., Jr., A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness, Machine Design, 1980, pp.107-110
24. Kovalev M.P., Narodetskiy M.Z. Raschet vysokotochnykh sharikopodshipnikov [Calculation of high-precision ball bearings]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 280 p.
25. Perel' L.Ya., Filatov A.A. Podshipniki kacheniya: raschet, proektirovanie i obsluzhivanie opor [Ball bearings: calculation, engineering and supports maintenance]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 608.
26. De Mul J., Vree J., Maas D. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part I: General theory and application to ball bearings // Journal of Tribology. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 142–148.
27. De Mul J.M., Vre J.M.e, Maas D.A. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part II: Application to roller bearings and experimental verification // Journal of Tribology. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 149–155.
28. Yuan Kanga, Ping-Chen Shen, Chih-Ching Huangc, Shyh-Shyong Shyrc, Yeon-Pun Chang "A Modification of the Jones- Harris Method for Deep-Groove Ball Bearings," *Tribology International*, Vol. 39, No. 11, 2006, pp. 1413-1420. <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2005.12.005>.
29. V.L. Khavin, B.M. Kyrkach, S.Yu. Pohorilov, S.Yu. Sherhin. Efektyvna model rozrakhunku neliiniinoi zhorkosti sharykopydshypnykiv [Effective model for calculating the nonlinear stiffness of ball bearings]. Visnyk NTU "KhPI" – Bulletin of the NTU "KhPI", no. 1(7), 2023, pp. 82–93.
30. V.L. Khavin, B.M. Kyrkach, S.Yu. Sherhin. Vdoskonalena inzhenerna model rozrakhunku radialnoi zhorkosti rolykovykh pidshypnykiv [Improved engineering model for calculating the radial stiffness of roller bearings]. Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu "KhPI". Seriya: Tekhnologii v mashynobuduvanni = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Technologies in Mechanical Engineering, no. 2(8), 2023, pp. 140–149. ISSN 2079-004X, DOI: 10.20998/2079-004X.2023.2(8).07.
31. M.D. White, "Timoshenko beam theory with modelling applications", University of Waterloo, 1994.
32. T. Hentati, F. Dammak, T. Fakhfakh, M. Haddar, "A finite element development for ball bearing nonlinear stiffness modelization", Int. J. Simul. Model., vol. 4(3), 2005, pp. 118-128.
33. Y. Zhang, G. Sun, T.C. Lim, L. Xie, "A fast and reliable numerical method for analyzing loaded rolling element bearing displacement and stiffness", JVE Journal of Vibroengineering, vol. 17(2), 2015, pp. 620-642.
34. V.-C. Tong, S.-W. Hong, "Study of stiffness of cylindrical roller bearings under combined radial and moment loads", Int. J. Mech. Prod. Eng., vol. 5(1), 2017, pp. 28-31.
35. Rijnberg, J. L. (2007). Theoretical modeling of the stiffness of angular contact ball bearings using a two DOF and a five DOF approach. (DCT rapporten; Vol. 2007.129). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven
36. Houpert, L. 1997. A Uniform Analytical Approach for Ball and Roller Bearing Calculations. Journal of Tribology, Vol. 119, pp. 851–858.
- 37 Gargiulo, E.P., Jr., A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness, Machine Design, 1980, pp.107-110.
38. R. Stribeck, "Ball Bearings for Various Loads," *Transactions of the ASME*, Vol. 29, 1907, pp. 420-463.
39. H. Sjoval, "The Load Distribution within Ball and Roller Bearings under Given External Radial and Axial Load," *TekniskTidskrift, Mek.*, h.9, 1933.
40. L.A. Kolesnikov, "Issledovanie staticheskikh i dinamicheskikh harakteristik shpindel'nyh uzlov stankov pri avtomatizirovannom proektirovanii", Minsk, BNTU, 2017, 55s.

Надійшла (received) 03.01.25

Відомості про авторів / About the Authors

Хавін Валерій Львович (Khavin Valeriy) – кандидат технічних наук, професор кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; e-mail: Valerij.Havin@khpi.edu.ua, ORCID: 0000-0002-4827-6474.

Хавін Євгеній Валерійович (Khavin Evgen) – кандидат технічних наук, директор ТОВ «Світс-7»; e-mail: ehavin@ukr.net, ORCID: 0009-0007-3593-8102.

Киркач Борис Миколайович (Kyrkach Borys) – кандидат технічних наук, професор кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп’ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; e-mail: Borys.Kyrkach@khpі.edu.ua, ORCID: [0000-0002-0432-1296](https://orcid.org/0000-0002-0432-1296).

Киркач Олексій Борисович (Kyrkach Oleksiy) – інженер-механік-конструктор, ТОВ «Енейбл Україна»; e-mail: olkys@enabl.dk., ORCID: [0000-0003-4594-557X](https://orcid.org/0000-0003-4594-557X).