

**ХАВІН В.Л., ХАВІН Є.В., КИРКАЧ Б.М., КИРКАЧ О.Б.**

## **СТАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ШПИНДЕЛЬНИХ ВАЛІВ НА НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ОПОРАХ ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНИХ ЖОРСТКОСТЕЙ**

Шпиндельний вузол металорізального верстата визначає точність та продуктивність металообробки. Жорсткість шпиндельного вузла оцінюються пружними переміщеннями шпиндельного валу під впливом робочого навантаження. Коректне моделювання жорсткості підшипників є умовою отримання достовірних результатів під час аналізу жорсткості шпинделя. Запропоновано підхід для статичного аналізу шпиндельних валів, у яких пружна поведінка опор визначається матрицями взаємопов'язаних жорсткостей. Введено матрицю жорсткості, що зв'язує радіальні деформації підшипника у двох взаємно перпендикулярних напрямках та поздовжню деформацію з відповідними зусиллями. Ітераційне формування коефіцієнтів цієї матриці здійснюється методом Ньютона-Рафсона за значеннями зусиль та переміщень в опорі. Для вирішення задачі аналізу в матричній формі отримано систему рівнянь, нелінійність якої формується залежністю пов'язаних матриць жорсткості підшипників від зусиль. У пакеті MatLAB створено універсальну комп'ютерну програму для статичного аналізу шпиндельних валів, у яких пружна поведінка опор задається матрицями взаємопов'язаних жорсткостей. Розглянуто статичний аналіз шпиндельного валу на опорно-упорних підшипниках. Проведено порівняння з результатами для роздільного вигину у двох перпендикулярних площинах при розрахунку радіальних жорсткостей підшипників за моделлю Джонса-Харріса.

**Ключові слова:** жорсткість шпиндельного валу, матриця взаємопов'язаних жорсткостей підшипника, нелінійна система рівнянь

**KHAVIN V., KHAVIN E., KYRKACH B., KYRKACH O.**

## **STATIC ANALYSIS OF SPINDLE SHAFTS ON NONLINEAR ELASTIC SUPPORTS OF INTERRELATED STIFFNESSES**

The spindle assembly of a metal cutting machine determines the accuracy and productivity of metalworking. The stiffness of the spindle assembly is estimated by the elastic movements of the spindle shaft under the influence of the working load. Correct modeling of bearing stiffness is necessary for obtaining reliable results during spindle stiffness analysis. An approach is proposed for the static analysis of spindle shafts, in which the elastic behavior of the supports is determined by matrices of interconnected stiffnesses. A stiffness matrix was introduced, which links the radial deformations of the bearing in two mutually perpendicular directions as well as the longitudinal deformation with the corresponding forces. Iterative formation of the coefficients of this matrix is carried out by the Newton-Raphson method based on the values of forces and deformations in the supports. To solve the problem of analysis in matrix form, a system of equations was obtained, the non-linearity of which is formed by the dependence of the stiffness matrices of the bearings on the forces. A universal computer program for the static analysis of spindle shafts, in which the elastic behavior of the supports is specified by matrices of interconnected stiffnesses, has been created using the MatLAB software. The static analysis of a spindle shaft on radial/thrust bearings was considered. A comparison was made with the results for separate bending in two perpendicular planes when calculating the radial stiffness of the bearings according to the Jones-Harris model.

**Key words:** stiffness of the spindle shaft, matrix of interconnected stiffnesses of the bearing, nonlinear system of equations,

**Вступ.** Шпиндельний вузол є відповідальним вузлом металорізального верстата, оскільки він, в першу чергу, визначає точність та продуктивність металообробки. Для досягнення необхідних значень технологічних параметрів процесу обробки конструкція шпиндельного вузла має бути оптимальною. До складу вузла входять власне шпиндель, опори з пристроями для їх регулювання, система змащення, ущільнення для герметизації опор, деталі передачі крутного моменту на шпиндель та інші пристрої. Шпиндель несе заготовку чи інструмент, тому на ньому виконуються відповідні базуючі поверхні, на яких встановлюються відповідні пристосування (патрон, інструментальна оправка тощо.).

Конструкції шпиндельного вузла досить різноманітні залежно від їх конструктивних схем, а саме: виду застосованих опор, способу передачі крутного моменту, а також типорозміру верстата та видів виконуваних робіт. Для отримання необхідної точності розмірів і форми оброблюваних поверхонь і забезпечення заданої продуктивності необхідно не тільки правильно вибрати розміри вузла, тип опор, але і забезпечити оптимальні значення експлуатаційних характеристик таких, як потужність, жорсткість та ін.

До шпиндельних вузлів металорізальних верстатів пред'являються вимоги щодо точності, жорсткості, вібростійкості, швидкохідності та ін. Жорсткість шпиндельного вузла верстата становить 50% і більше у балансі жорсткості верстата. Виходячи з вимог до точності обробки прогин шпинделя від сил різання та сил приводу не повинен перевищувати третини допуску на обробку. Радіальна та осьова жорсткість шпиндельного вузла оцінюються переміщеннями кінця шпиндельного валу під дією робочого навантаження. При цьому коректне моделювання жорсткості підшипників є найважливішою умовою отримання достовірних результатів статичного аналізу шпиндельного валу при проектуванні і зменшить обсяг експериментів.

Оскільки можливості експериментального визначення пружних переміщень інструменту та заготовки в зоні обробки обмежені, то для статичного аналізу шпиндельного валу та визначення переміщень у зоні різання розробляються різні пружно-деформаційні моделі, які безперервно вдосконалюються з метою підвищення точності розрахунку, що визначає актуальність даної роботи.

**Стан питання та невирішена частина проблеми.** В даний час для підвищення продуктивності та якості обробки розроблені системи підшипників для шпинделів, якими оснащена більшість верстатів, є комбінованими секційними радіально-упорними і конічними підшипниками. Радіально-упорні шарикопідшипники найчастіше використовуються в верстатах через їх високі характеристики жорсткості, низькі втрати на тертя, довгий термін служби і гарні показники вартості та працездатності.

Щоб створити працездатну конструкцію шпинделя на стадії проектування необхідний статичний і динамічний аналіз шпиндельного вузла, який забезпечує теоретичну основу для формування характеристик шпинделя і верстата.

Для інженера-конструктора важливо мати можливість провести швидку оцінку різних варіантів шпindelного вузла ще на етапі попереднього проектування. Успіх проектування залежить від наявності в інженера-конструктора досвіду, а також правильного вибору відповідних підходів, моделей, методів та програмних засобів аналізу.

Особливість статичного аналізу шпindelних вузлів – це одночасний облік жорсткості шпindelного валу та жорсткості його опор. При моделюванні роботи шпindelних вузлів ефект впливу підшипника включається до моделі системи введенням відповідного набору жорсткостей підшипника. Перші моделі для статичного аналізу шпindelного валу були пружними балками на лінійно - пружних опорах, навантажені зосередженими силами [1-3]. Однак більшість підшипників кочення є складними механічними структурами з прецизійних елементів, які за своєю природою мають нелінійні статичні та динамічні характеристики. Отже, для забезпечення достовірного статичного чи динамічного аналізу шпindelного вузла необхідно мати досить простий і коректний метод оцінки жорсткості підшипників.

Вченими були проведені чисельні дослідження задля визначення нелінійних матриць жорсткості підшипників. Класичними є моделі Палмгрена – Джонса – Харріса [4-6], а також емпіричні залежності Гаргіуло [7]. У цих моделях формується зв'язок радіального та осьового навантаження на підшипник з відповідними переміщеннями, з використанням нелінійного коефіцієнта жорсткості. Спрощені діагональні матриці жорсткості, отримані в цих дослідженнях, засновані на припущенні про ідеальні граничні умови та зневагу зв'язками між окремими ступенями свободи для переміщень підшипника. Лім і Сінгх [8-10] запропонували більш загальну матрицю жорсткості з повними п'ятьма пов'язаними ступенями свободи для кулькових та роликових підшипників. У цих моделях був застосований метод дискретного підсумовування для отримання сумарних сил та моментів від усіх навантажених елементів кочення. Система нелінійних алгебраїчних рівнянь при формуванні коефіцієнтів пов'язаної матриці жорсткості підшипника чисельно вирішувалася методом Ньютона-Рафсона. Потім Херно [11] отримав матрицю жорсткості з п'ятьма ступенями свободи для радіально-упорного підшипника за допомогою аналітичного підходу, в якому підсумовування зусиль елементів кочення замінюється інтегруванням. Замість аналітичного підходу Го і Паркер [12] розробили скінчено елементну модель контактної механіки для отримання матриць жорсткості в широкому діапазоні типів підшипників.

Безпосередній облік нелінійної жорсткості опор для багато опорних ступінчастих шпindelних валів є можливим при використанні для статичного аналізу методу скінчених елементів (МСЕ) або методу початкових параметрів (МПП), наприклад, [13-22]

Практично в усіх моделях статичного аналізу шпindelних валів використовуються діагональні матриці жорсткості підшипників, у яких не враховуються перехресні зв'язки між радіальними, кутовими та осьовими переміщеннями підшипників. З іншого боку, повна матриця жорсткості, вперше запропонована Лімом та Сінгхом [8-10], продемонструвала свою ефективність. Їх підхід набув широкого поширення та показав ефективність у загальному динамічному аналізі роторів із зубчатою передачею, наприклад, [23-25]. Матриця жорсткості з п'ятьма ступенями свободи використана динамічному аналізі шпindelя шліфувального верстата [26], де були отримані гарні збіги між аналітичними та експериментальними власними значеннями. Використання повної матриці жорсткості порівняно з діагональною матрицею жорсткості впливає на значення власних частот і амплітуд відгуку, а також призводить до виявлення нових вібраційних тонів. Застосування пов'язаних матриць жорсткості у ряді завдань статичного аналізу шпindelних вузлів також показало необхідність урахування перехресних зв'язків, особливо для радіально-упорних та конічних підшипників. Результати, отримані у роботі [27], показали, що поведінка шарикопідшипників керується його механічним середовищем, а радіальні та осьові переміщення тісно пов'язані.

Статичний аналіз шпindelного валу з урахуванням нелінійних зв'язаних жорсткостей опор може бути виконаний за допомогою стандартних або спеціальних програм. Проведення аналізу жорсткості за допомогою комерційних програмних комплексів залежить від досвіду інженерів. Результати можуть бути незадовільними навіть під час використання відповідного математичного методу (метод скінчених елементів, метод граничних елементів тощо. буд.). Це пов'язано з тим, що, підшипникові вузли є статично невизначеними нелінійними системами, які виявляють не лінійність деформування під зовнішнім навантаженням.

Спеціальні програми розроблені з використанням найсучасніших теоретичних та практичних знань коштують дуже дорого. Ці програми розроблені, як правило, науково-дослідними інститутами та виробниками підшипників, а можливість використання таких програм суттєво впливає на становище на ринку

Зважаючи на вищевикладене, доцільним є розробка інженерних методів та програмного забезпечення статичного аналізу шпindelних валів. Такий підхід дозволяє на стадії попереднього проектування обмежити кількість можливих варіантів вибору шпindelних підшипників та визначити напрямок, який надасть оптимальну конструкцію.

У роботах [28, 29] на основі прямого методу початкових параметрів запропоновано підхід до статичного аналізу багато опорних шпindelних валів, який має універсальність в обліку конфігурації валу, довільної кількості опор та їх не лінійності, але не враховує перехресні зв'язки при розрахунку характеристик жорсткості підшипників, інакше кажучи пов'язаних жорсткостей пружних опор.

Мета цієї роботи – розробка підходу, математичної моделі та програмного забезпечення для статичного аналізу багато опорних шпindelних валів на нелінійно пружних опорах із взаємопов'язаними жорсткостями.

**Постановка задачі.** Головним статичним розрахунком для шпиндельного вузла є оцінка жорсткості та визначення переміщень кінцевого (робочого) перерізу шпиндельного валу під дією зусиль різання та зусиль, що діють із боку приводу.

При створенні розрахункової схеми та математичної моделі були введені гіпотези та припущення, використані у роботах [28 - 30], до яких додається нелінійний зв'язок між радіальними жорсткостями та поздовжньою жорсткістю підшипників.

Багато опорний ступінчастий шпиндельний вал (рис. 1а) має  $M$  ділянок кусково-постійної згинальної жорсткості  $EI_m, m = 1,2,3,\dots,M$ ; і зсувної жорсткості  $GA_m, m = 1,2,3,\dots,M$ .

Перехід через опори-підшипники характеризується матрицями нелінійно-пружної жорсткості  $K_n^*, n = 1,2,3,\dots,N$ , що зв'язують радіальні реакції  $R_{nx}, R_{ny}$  та поздовжні реакції  $R_{nz}, n = 1,2,3,\dots,N$  з переміщеннями опори. Детальне формування матриці нелінійно-пружної жорсткості шарикопідшипників  $K_n^*$  буде розглянуто нижче, в додатку В цієї роботи.

На шпиндельний вал у площинах згину  $yoz$  і  $xoz$ , діють згинальні зусилля та моменти сил різання  $F_{yc}, M_{xc}, F_{xc}, M_{yc}$ , а також згинальні зусилля та моменти з боку приводу  $F_{yd}, M_{xd}, F_{xd}, M_{yd}$ . У відповідних перерізах діють поздовжня сила різання та сила з боку приводу  $F_{zc}$  і  $F_{zd}$  (Рис. 1). Для розрахункової схеми розв'язується задача статичного аналізу з визначення переміщень в ступінчастому багато опорному валу на нелінійно пружних опорах, кожна з яких характеризується нелінійною зв'язаною матрицею жорсткості  $K_n^*$ .

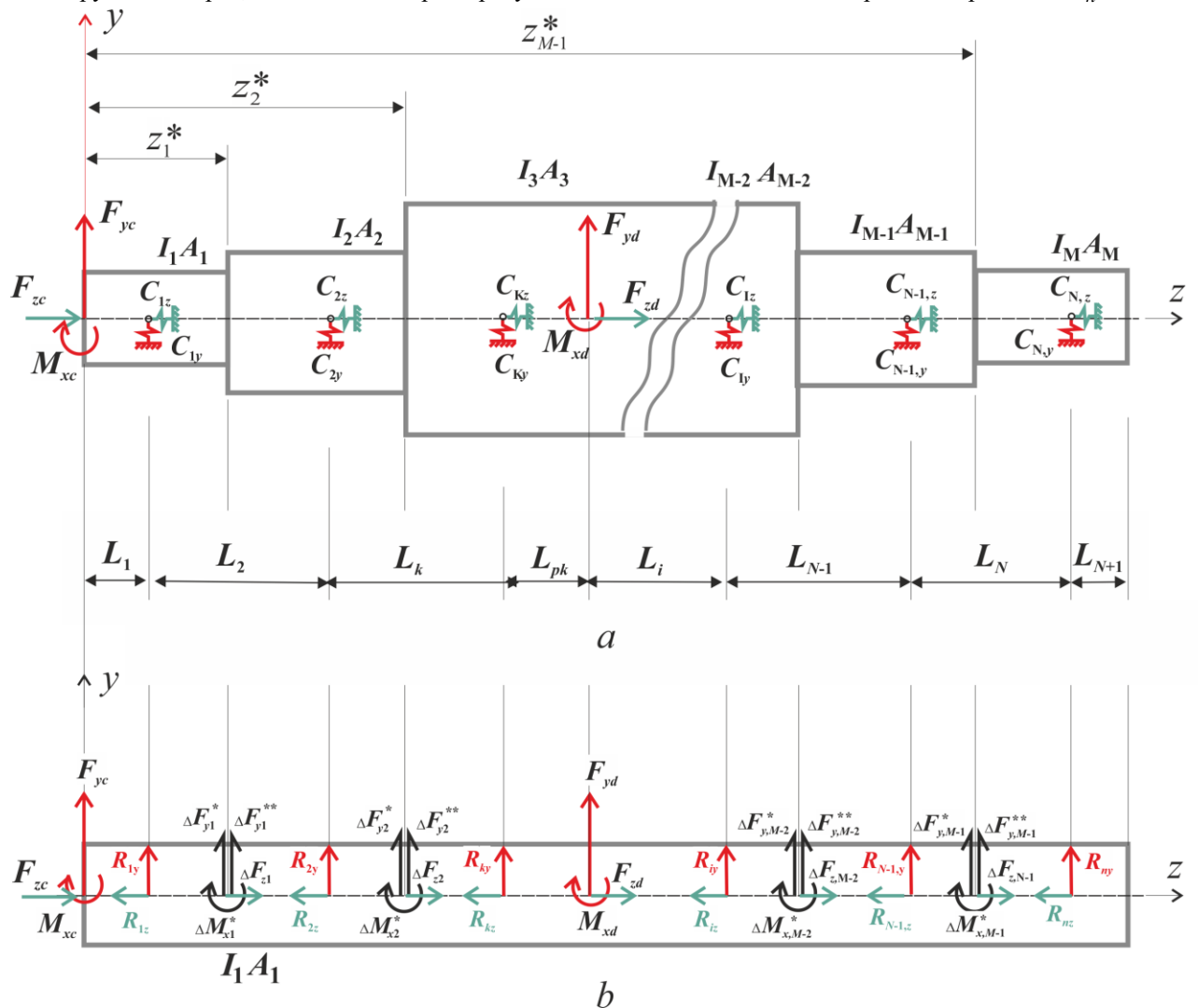


Рисунок 1. Розрахункова схема багато опорного ступінчатого шпиндельного валу

**Метод вирішення задачі.** У запропонованому підході для визначення згинальних переміщень використовується модель балки Тимошенко, у якій поряд з деформаціями згину враховуються деформації зсуву, що актуально для багато опорних шпиндельних валів, де згинальна жорсткість коротких між опорних ділянок порівнянна з жорсткістю цих ділянок на зсув. Також розглядалося поздовжнє деформування валу у межах гіпотези плоских перерізів.

Для вирішення задачі статичного аналізу шпindelного валу в рамках наведених вище гіпотез застосовується докладно розглянуте в [28-30] інтегрування прямим методом початкових параметрів диференціальних рівнянь вигнутої осі балки та диференціального рівняння розтягування - стискання валу.

Диференціальні рівняння вигину та розтягування - стискання для ділянки  $m$ -тої жорсткості ( $m = 1, 2, 3, \dots, M$ ) представляються залежностями [29,30]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dz^2} &= \frac{M_x(z)}{EI_m} - \frac{K_{tm}}{GA_m} \frac{dQ_y(z)}{dz}, \\ \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{M_y(z)}{EI_m} - \frac{K_{tm}}{GA_m} \frac{dQ_x(z)}{dz}, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{N(z)}{EA_m}, \end{aligned} \quad (1)$$

У рівнянні (1) введені позначення:  $z$  - поточна координата,  $v(z), u(z)$  - рівняння вигнутої осі балки в площинах  $uoz$  і  $hoz$  відповідно;  $w(z)$  - функція поздовжніх переміщень валу;  $E, G$  - відповідно модуль пружності та модуль зсуву матеріалу валу;  $I_m, A_m$  - момент інерції щодо нейтральної осі та площа поперечного перерізу валу відповідно;  $M_x(z), Q_y(z), M_y(z), Q_x(z)$  - відповідно внутрішні згинальні моменти та внутрішні поперечні сили в перерізі з координатою  $z$ ;  $N(z)$  - внутрішня поздовжня сила в перерізі з координатою  $z$ ;  $K_{tm}$  - коефіцієнт форми поперечного перерізу  $m$ -тої ділянки.

У даній роботі для ступінчастого валу використовується модифікований метод початкових параметрів [29,30]. Основне положення модифікації полягає в тому, що вал приводиться до еквівалентного деформації бруса постійного поперечного перерізу. Щоб забезпечити тотожність деформацій валу, що розглядається, і еквівалентного бруса постійного перерізу, наприклад, рівного перерізу першої ділянки, необхідно внутрішні і зовнішні сили, що діють на балку, змінити і привести до відповідних еквівалентних значень. У цьому випадку для ступінчастої балки диференціальні рівняння (1) можуть бути перетворені:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dz^2} &= \frac{k_m^{\bullet} M_x(z)}{EI_1} - \frac{K_{t1} k_m^{\bullet\bullet}}{GA_1} \frac{dQ_y(z)}{dz}, \\ \frac{d^2 u}{dz^2} &= \frac{k_m^{\bullet} M_y(z)}{EI_1} - \frac{K_{t1} k_m^{\bullet\bullet}}{GA_1} \frac{dQ_x(z)}{dz}, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{k_m^{\bullet\bullet\bullet} N(z)}{EA_1} \end{aligned} \quad (2)$$

де  $k_m^{\bullet} = I_1 / I_m$  - згинальний коефіцієнт приведення,  $I_1$  - момент інерції щодо нейтральної осі першої ділянки, до жорсткості якого приводиться ступінчастий вал,  $I_m$  - момент інерції  $m$ -тої ділянки валу;  $k_m^{\bullet\bullet} = K_{tm} A_1 / K_{t1} A_m$  - зсувний коефіцієнт приведення,  $A_1$  - площа поперечного перерізу першої ділянки,  $A_m$  - площа поперечного перерізу  $m$ -тої ділянки,  $K_{t1}$  - коефіцієнт форми поперечного перерізу 1-ї ділянки,  $K_{tm}$  - коефіцієнт форми поперечного перерізу  $m$ -тої ділянки,  $k_m^{\bullet\bullet\bullet} = A_1 / A_m$  - поздовжній коефіцієнт приведення.

Для того, щоб ділянки приведеної жорсткості валу постійного поперечного перерізу деформувалися еквівалентно ділянці вихідної жорсткості, поздовжні, згинальні і зсувні зусилля множаться на відповідні коефіцієнти приведення. Так як при цьому сили і моменти, що діють на стиках ділянок і замінюють дію відсіченої частини еквівалентного бруса вже не будуть зрівноважувати один одного, то на стиках ділянок прикладаються додаткові поздовжні сили, зусилля, що зсувають та згинають, а також моменти, які при розрахунку деформованого стану еквівалентного бруса додаються до вихідної системи зовнішніх зусиль схеми (див. рис. 1б).

Відповідні вирази для додаткових сил і моментів, наприклад, при приведенні до еквівалентного бруса, що має переріз першої ділянки вихідного валу, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta M_{xm}^{\bullet} &= (k_{m+1}^{\bullet} - k_m^{\bullet}) M_x(z_m^{\bullet}), \\ \Delta M_{ym}^{\bullet} &= (k_{m+1}^{\bullet} - k_m^{\bullet}) M_y(z_m^{\bullet}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta F_{ym}^{\bullet} &= (k_{m+1}^{\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet})Q_y(z_m^{\bullet}), \\ \Delta F_{xm}^{\bullet} &= (k_{m+1}^{\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet})Q_x(z_m^{\bullet}), \\ \Delta F_{zm}^{\bullet} &= (k_{m+1}^{\bullet\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet\bullet})N(z_m^{\bullet}),\end{aligned}\quad (3)$$

де  $M_x(z_m^{\bullet})$ ,  $M_y(z_m^{\bullet})$ ,  $Q_y(z_m^{\bullet})$ ,  $Q_x(z_m^{\bullet})$  і  $N(z_m^{\bullet})$  - внутрішні згинальні моменти, внутрішні поперечні сили та внутрішня поздовжня сила, що діють на стику  $m$  - тої і  $m+1$  - тої ділянок валу,  $z_m^{\bullet}$  - координата стику цих ділянок ( $m = 1, 2, 3, \dots, M$ ).

У моделі балки Тимошенко для кожної ділянки при визначенні переміщень від зсуву слід використовувати зсувний коефіцієнт приведення  $k_m^{\bullet\bullet}$ , і, поряд з множенням зовнішніх сил на коефіцієнти приведення, вводяться відповідні додаткові фіктивні зсувні сили  $\Delta F_m^{\bullet\bullet}$ , що прикладаються на стику ділянок (Рис. 1b):

$$\begin{aligned}\Delta F_{ym}^{\bullet\bullet} &= (k_{m+1}^{\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet})Q_y(z_m^{\bullet}), \\ \Delta F_{xm}^{\bullet\bullet} &= (k_{m+1}^{\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet})Q_x(z_m^{\bullet}).\end{aligned}\quad (4)$$

В результаті, для визначення згинальних переміщень формується балка постійної жорсткості  $EI_1 = const$ ,  $EA_1 = const$ ,  $GA_1 = const$ , деформована пружна вісь якої буде еквівалентна пружно деформованій осі вихідного валу. Для цієї балки при обліку тільки першого доданку в правих частинах на основі еквівалентної розрахункової схеми (рис. 1b) для прогинів  $u_1(z_i)$ ,  $v_1(z_i)$ , кутів повороту  $\Theta_{y1}(z_i)$ ,  $\Theta_{x1}(z_i)$ , а також для функції поздовжніх переміщень  $w(z_i)$  формується розв'язання диференціальних рівнянь (2) методом початкових параметрів, детально розглянуте в роботі [30].

До згинальних переміщень додаються переміщення  $u_2(z_i)$ ,  $v_2(z_i)$  і  $\Theta_{y2}(z_i)$ ,  $\Theta_{x2}(z_i)$  від зсуву, що визначаються рішенням для розрахункової схеми на рисунку 1b перших двох диференціальних рівнянь (2) при обліку в правій частині тільки другого доданку.

Результуюче рішення  $u(z_i)$ ,  $v(z_i)$  і  $\Theta_y(z_i)$ ,  $\Theta_x(z_i)$  набуває вигляду:

$$\begin{aligned}v(z_i) &= v_1(z_i) + v_2(z_i), \\ u(z_i) &= u_1(z_i) + u_2(z_i), \\ \Theta_x(z_i) &= \Theta_{x1}(z_i) + \Theta_{x2}(z_i), \\ \Theta_y(z_i) &= \Theta_{y1}(z_i) + \Theta_{y2}(z_i).\end{aligned}\quad (5)$$

Методом початкових параметрів формується рішення диференціального рівняння для функції поздовжніх переміщень  $w(z_i)$ .

Розв'язання диференціальних рівнянь (2) методом початкових параметрів складаються із загальних розв'язків однорідних рівнянь та приватних розв'язків неоднорідних рівнянь. Загальні рішення для рівнянь вигнутої осі містить константи  $v_0$ ,  $\Theta_{x0}$ ,  $u_0$ ,  $\Theta_{y0}$  (прогини та кути повороту на початку координат), приватні рішення залежать від зовнішніх зусиль, що формують праву частину диференціального рівняння, і визначаються через універсальні функції  $\Phi_y(z_i)$ ,  $\Phi_y^*(z_i)$ ,  $\Phi_x(z_i)$ ,  $\Phi_x^*(z_i)$ . Рішення рівняння функції поздовжніх переміщень містить константу  $w_0$  і універсальну функцію  $\Phi_z(z_i)$ , що представляє приватне рішення відповідного диференціального рівняння:

$$\begin{aligned}v_1(z_i) &= v_{10} + \Theta_{x01}z_i + \frac{\Phi_{y1}(z_i)}{EI_1}, \\ \Theta_{x1}(z_i) &= \Theta_{x01} + \frac{\Phi_{y1}^*(z_i)}{EI_1}, \\ u_1(z_i) &= u_{10} + \Theta_{y01}z_i + \frac{\Phi_{x1}(z_i)}{EI_1},\end{aligned}\quad (6)$$

$$\Theta_{y1}(z_i) = \Theta_{y01} + \frac{\Phi_{x1}^{\bullet}(z_i)}{EI_1}$$

$$w(z_i) = w_0 + \frac{\Phi_z(z_i)}{EA_1}$$

Функції  $\Phi_{y1}(z_i)$ ,  $\Phi_{y1}^*(z_i)$ ,  $\Phi_{x1}(z)$ ,  $\Phi_z(z_i)$  для розрахункової схеми валу на рисунку 1b наведені в додатку А.

Рішення рівняння (2) для зсувних переміщень  $v_2(z_i)$ ,  $\Theta_{x2}(z_i)$ ,  $u_2(z_i)$ ,  $\Theta_{y2}(z_i)$  еквівалентного бруса (рис.1b) для групи характерних перерізів, що визначаються сукупністю дискретних, послідовно зростаючих локальних координат  $z_i$ , ( $i$  – номер прольоту) є залежностями:

$$v_2(z_i) = v_{20} + \Theta_{x02}z_i - \frac{K_{t1}}{GA_1}\Phi_{y2}(z_i),$$

$$\Theta_{x2}(z_i) = \Theta_{x02} - \frac{K_{t1}}{GA_1}\Phi_{y2}^{\bullet}(z_i) \quad (7)$$

$$u_2(z_i) = u_{20} + \Theta_{y02}z_i - \frac{K_{t1}}{GA_1}\Phi_{x2}(z_i),$$

$$\Theta_{y2}(z_i) = \Theta_{y02} - \frac{K_{t1}}{GA_1}\Phi_{x2}^{\bullet}(z_i)$$

Функції  $\Phi_{y2}(z_i)$ ,  $\Phi_{y2}^*(z_i)$ ,  $\Phi_{x2}(z_i)$ ,  $\Phi_{x2}^*(z_i)$  для розрахункової схеми валу малюнку 1b наведено у додатку А.

Умови сполучення на опорах формуються виходячи з того, що в даній моделі не враховується кутова жорсткість опор, а переміщення осі валу  $u_n(z_n)$ ,  $v_n(z_n)$ ,  $w_n(z_n)$  на  $n$ -тій опорі, що має координату  $z_n$ , пов'язані з реакціями опори  $R_{nx}$ ,  $R_{ny}$ ,  $R_{nz}$  залежністю:

$$K_n^{\bullet}q_n = R_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots N, \quad (8)$$

де для опорно-упорного підшипника  $K_n^{\bullet}$  - симетрична матриця жорсткості  $n$ -тої опори розмірністю  $3 \times 3$ , для радіального підшипника - симетрична матриця розмірністю  $2 \times 2$ , формування яких представлено в додатку В. Вектори переміщень  $q_n$  і реактивних зусиль  $R_n$  для опорно-упорного підшипника мають вигляд:

$$q_n = [u_n v_n w_n]^T, \quad R_n = [R_{nx} R_{ny} R_{nz}]^T,$$

а для радіального:

$$q_n = [u_n v_n]^T, \quad R_n = [R_{nx} R_{ny}]^T$$

Умови зв'язку реактивних зусиль з переміщеннями опори в розгорнутому вигляді надаються за допомогою коефіцієнтів зворотної матриці  $K_n = (K_n^{\bullet})^{-1}$  наступними залежностями:

- для опорно-упорного підшипника

$$u_n(z_n) = -(k_{xx}^n R_{nx} + k_{xy}^n R_{ny} + k_{xz}^n R_{nz}),$$

$$v_n(z_n) = -(k_{yx}^n R_{nx} + k_{yy}^n R_{ny} + k_{yz}^n R_{nz}),$$

$$w_n(z_n) = -(k_{zx}^n R_{nx} + k_{zy}^n R_{ny} + k_{zz}^n R_{nz}) \quad (9)$$

- для радіального

$$u_n(z_n) = -(k_{xx}^n R_{nx} + k_{xy}^n R_{ny}),$$

$$v_n(z_n) = -(k_{yx}^n R_{nx} + k_{yy}^n R_{ny}),$$

Індекс  $n$  у коефіцієнтах матриці  $K_n$  ( $k_{xx}^n, k_{xy}^n, k_{xz}^n, k_{yx}^n, k_{yy}^n, k_{yz}^n, k_{zx}^n, k_{zy}^n, k_{zz}^n$ ) означає приналежність до  $n$ -тої опори.

Співвідношення (9) дозволяють сформулювати умови сполучення на опорах (для опорно-упорного підшипника):

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + \Theta_{y0} z_n + \frac{\Phi_{x1}(z_n)}{EI_1} - \frac{K_{t1}}{GA_1} \Phi_{x2}(z_n) = -(k_{xx}^n R_{nx} + k_{xy}^n R_{ny} + k_{xz}^n R_{nz}), \\ v_n &= v_0 + \Theta_{x0} z_n + \frac{\Phi_{y1}(z_n)}{EI_1} - \frac{K_{t1}}{GA_1} \Phi_{y2}(z_n) = -(k_{yx}^n R_{nx} + k_{yy}^n R_{ny} + k_{yz}^n R_{nz}), \\ w_n &= w_0 + \frac{\Phi_z(z_n)}{EA_1} = -(k_{zx}^n R_{nx} + k_{zy}^n R_{ny} + k_{zz}^n R_{nz}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$v_0 = v_{10} + v_{20}, \quad u_0 = u_{10} + u_{20}, \quad \Theta_{y0} = \Theta_{y01} + \Theta_{y02}, \quad z_n = \sum_{j=0}^n L_j, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

До розв'язків диференціальних рівнянь вигнутої осі (6),(7) та умов сполучення на опорах (10) додаються умови статичної рівноваги – рівність нулю проекцій усіх сил на осі  $x$ ,  $y$  і  $z$ , рівність нулю суми моментів щодо осей  $x$  і  $y$ , розташованих на початку координат (див. рис. 1):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N R_{nx} + F_{xc} + F_{xd} &= 0, \\ \sum_{n=1}^N R_{ny} + F_{yc} + F_{yd} &= 0, \\ \sum_{n=1}^N R_{nz} + F_{zc} + F_{zd} &= 0, \\ \sum_{n=1}^N (R_{nx} \sum_{j=1}^n L_j) + F_{xd} (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}) - M_{yc} - M_{yd} &= 0, \\ \sum_{n=1}^N (R_{ny} \sum_{j=1}^n L_j) + F_{yd} (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}) - M_{xc} - M_{xd} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Спільне рішення рівнянь (10) і (11) на основі рішень (6), (7) дозволяє сформулювати систему рівнянь, з якої визначаються реакції опор, прогини та кути повороту перерізу валу на початку координат (початкові параметри  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\Theta_{x0}$ ,  $\Theta_{y0}$ ,  $w_0$ ). Для розрахункової схеми валу на малюнку 1b формується система з  $(3N+5)$  алгебраїчних рівнянь для визначення початкових параметрів  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\Theta_{x0}$ ,  $\Theta_{y0}$ ,  $w_0$  і реактивних зусиль  $R_{nx}, R_{ny}, R_{nz}$   $\circ n = 1, 2, \dots, N$ , яка має вигляд:

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + \Theta_{y0} z_n + \frac{\Phi_{x1}(z_n)}{EI_1} - \frac{K_{t1}}{GA_1} \Phi_{x2}(z_n) = -(k_{xx}^n R_{nx} + k_{xy}^n R_{ny} + k_{xz}^n R_{nz}), \\ v_n &= v_0 + \Theta_{x0} z_n + \frac{\Phi_{y1}(z_n)}{EI_1} - \frac{K_{t1}}{GA_1} \Phi_{y2}(z_n) = -(k_{yx}^n R_{nx} + k_{yy}^n R_{ny} + k_{yz}^n R_{nz}), \\ w_n &= w_0 + \frac{\Phi_z(z_n)}{EA_1} = -(k_{zx}^n R_{nx} + k_{zy}^n R_{ny} + k_{zz}^n R_{nz}) \quad n = 1, 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^N R_{nx} + F_{xc} + F_{xd} = 0, \sum_{n=1}^N R_{ny} + F_{yc} + F_{yd} = 0, \sum_{n=1}^N R_{nz} + F_{zc} + F_{zd} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^N (R_{nx} \sum_{j=1}^n L_j) + F_{xd} (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}) - M_{yc} - M_{yd} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^N (R_{ny} \sum_{j=1}^n L_j) + F_{yd} (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}) - M_{xc} - M_{xd} = 0,$$

Вирази для  $\Phi_{x1}(z_n), \Phi_{x2}(z_n), \Phi_{y1}(z_n), \Phi_{y2}(z_n), \Phi_z(z_n)$  визначаються залежностями з додатка А. при заміні множини  $z_i$  на безліч координат  $z_n, n = 1, 2, 3, \dots, N$ .

Отримані з системи рівнянь (12) значення  $u_0, v_0, \Theta_{x0}, \Theta_{y0}, w_0$  і  $R_{nx}, R_{ny}, R_{nz}, n = 1, 2, \dots, N$  дозволяють за допомогою виразів (6) і (7) визначити всю сукупність переміщень перерізів валу при довільному значенні координати  $z_i$ .

Слід зазначити, що запропонований підхід дозволяє обчислювати реактивні зусилля, поздовжні переміщення, сумарні переміщення, викликані вигином і зсувом валу шпинделя і поперечною податливістю пружних опор – підшипників у разі лінійної жорсткості пружних опор (матриць жорсткості опор, що не залежать від діючих реактивних зусиль). Внаслідок не лінійності матриці жорсткості з  $K_n^* = K_n^*(R_n)$  розглянуті крайові задачі при чисельному їх вирішенні повинні бути лінеаризовані.

**Рішення нелінійної крайової задачі.** Для зручності чисельного розв'язання, системи рівнянь (12) представляються в матричній формі  $AX = B$ , де  $A$  – матриця коефіцієнтів при невідомих розмірністю  $(3N + 5) \times (3N + 5)$ ,  $B$  – вектор – стовпець правих частин повної розмірністю  $(3N + 5)$ .

Вектор – стовпець невідомих  $X$  (рішення) має вигляд:  $X^T = [X_1^T, X_2^T, X_2^T]$ ,  $X_1^T = [u_0, \Theta_{y0}, R_{x1}, R_{x2}, \dots, R_{xN}]$ ,  $X_2^T = [v_0, \Theta_{x0}, R_{y1}, R_{y2}, \dots, R_{yN}]$ ,  $X_3^T = [w_0, R_{z1}, R_{z2}, \dots, R_{zN}]$ , і включає початкові параметри та реакції опор.

Структура матриці включає 9 під матриць і має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix},$$

де  $A_{xy} = A_{yx}$ .

Матриці  $A_{xx}, A_{xy}, A_{yx}, A_{yy}$  мають розмірність  $(N + 2) \times (N + 2)$ ,  $A_{xz}, A_{yz}$  –  $(N + 2) \times (N + 1)$ ,  $A_{zx}, A_{zy}$  –  $(N + 1) \times (N + 2)$ ,  $A_{zz}$  –  $(N + 1) \times (N + 1)$ .

У разі опори у вигляді радіального підшипника в векторі  $X_3^T = [w_0, R_{z1}, R_{z2}, \dots, R_{zN}]$  виключається відповідна компонента, у матрицях  $A_{xz}, A_{yz}$  – відповідний стовпець, у матрицях  $A_{zx}, A_{zy}$  – відповідний рядок, а в  $A_{zz}$  – відповідні рядок і стовпець.

Коефіцієнти матриць  $A_{xx}, A_{xy}, A_{yx}, A_{yy}, A_{zx}, A_{zy}, A_{xz}, A_{yz}, A_{zz}$  і компоненти вектора – стовпця правих частин  $B$  обчислюються відповідно до залежностей, представлених у додатку С.

Внаслідок того, що коефіцієнти матриць жорсткості опор нелінійно залежать від відповідних реактивних зусиль (додаток В), система рівнянь (12) є нелінійною. При значній кількості опор та наявності пов'язаних нелінійних матриць жорсткості підшипників (додаток В) відповідним чином збільшується як кількість рівнянь у системі рівнянь (12), так і час вирішення задачі, внаслідок чого отримати аналітичні рішення неможливо. Тому для отримання рішення системи рівнянь (12) застосовувався метод послідовних ітерацій, докладно описаний у роботі [28]. Для обраного початкового орієнтовного набору опорних переміщень формуються матриці жорсткості опор, вирішується лінійна крайова задача, визначається початковий набір реактивних зусиль і нових переміщень на опорах. По отриманому набору реактивних зусиль і переміщень формуються нові матриці жорсткості опор і знову вирішується задача пошуку реактивних зусиль і опорних переміщень, Ітераційний процес триває до того часу, поки буде отримана задана точність обчислень.

Для вирішення сформованої крайової задачі, що включає рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному ітераційному кроці, використовується розроблена комп'ютерна програма, реалізована в пакеті MatLAB.



**Результати розрахунків для багато опорного багатоступінчастого валу.** У сучасних високоточних багато опорних шпindelних вузлах для підвищення жорсткості встановлюється кілька спарених підшипників, а заміна групи підшипників однією зосередженою опорою може давати недостатню точність для коректного аналізу статичного стану валу. Тому при чисельному експерименті необхідно ввести таку кінцеву кількість пружних опор пов'язаної жорсткості, яка забезпечить необхідну точність розрахунку. Запропонований у цій роботі підхід та програмне забезпечення дозволяють з незначними трудовитратами провести подібні розрахунки.

Як приклад статичного аналізу розглядалася модель шпindelного валу фрезерного верстата з роботи [30] (рис. 2а). Розрахункова схема багатоступінчастого валу на трьох пружних опорах наведена на рисунку 2б. Вал має 6 ділянок різної жорсткості, зазначених на розрахунковій схемі номерами 1 - 6. Геометричні характеристики та жорсткості ділянок наведені в таблиці 1. Модуль пружності та модуль зсуву матеріалу валу приймалися  $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$  та  $G = 0,8 \times 10^5 \text{ МПа}$  відповідно.

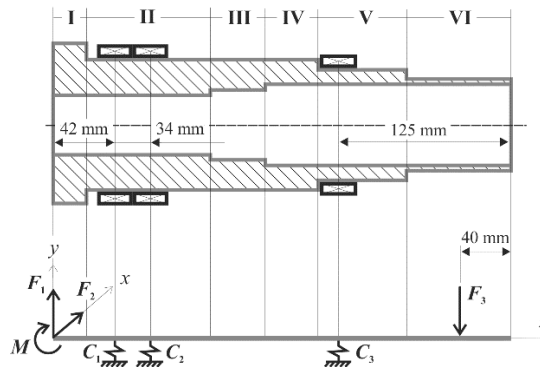


Рисунок 2. Шпindelний вал фрезерувального верстату

Вал має 6 ділянок різної жорсткості, які пронумеровані римськими цифрами. Геометричні параметри та жорсткості ділянок наведено у таблиці 2, коефіцієнт форми перерізу для всіх ділянок валу приймається однаковим -  $K_f = 2$  (кільце).

Зовнішнє навантаження складається з сил різання  $F_1=103\text{N}$ ,  $F_2=600\text{N}$ , моменту різання  $M=50\text{Nm}$ , а також зусилля від приводу  $F_3=300\text{N}$ . Навантаження  $F_1$ ,  $F_3$  та  $M$  згинають вал у площині  $yz$ , а сила  $F_2$  – у площині  $xz$  (рис. 2б).

На передньому кінці шпindelний вал спирається на два радіально-упорні підшипники марки 36220k, радіально-упорний підшипник марки 6218k, що не працює в поздовжньому напрямку, використовується як задня опора (див. рис.2а). Характеристики підшипників наведено у таблиці 2.

Таблиця 1. Геометричні характеристики і жорсткості ділянок вала

№ ділянки	Діаметр, мм		Довжина, мм	Жорсткість		Коеф. форми
	Зовнішній	Внутрішній		$EI, \text{нмм}^2$	$GA, \text{н}$	
1	130	60	15	29,4	8,32	2,0
2	100	60	27	8,97	4,02	2,0
3	100	65	174	8,59	3,63	2,0
4	100	75	83	7,06	2,75	2,0
5	90	75	57	3,51	1,55	2,0
6	80	75	45	0,953	0,487	2,0
7	80	75	40	0,953	0,487	2,0

Таблиця 2. Характеристики підшипників

Марка підшипника	Характеристики				
	Зовнішній діаметр $D, \text{мм}$	Внутрішній діаметр $d, \text{мм}$	Ширина $B, \text{мм}$	Кількість шариків $Z$	Діаметр шариків $d_0, \text{мм}$
36220k	180	100	34	10	25,44
36218k	160	90	30	10	22,23
6120	150	100	24	15	14,288

6118	140	90	22	14	14,288
------	-----	----	----	----	--------

Для розглянутої розрахункової схеми був проведений статичний аналіз і отримані позовжні і згинальні переміщення перерізів валу при його розтягуванні-стисканні та згинанні в площинах  $uoz$  і  $hoz$ . Розподіл переміщень представлений у таблиці 3 (рядки 1, 2 та 3) та на рисунку 3

Для порівняння були проведені розрахунки при встановлених в якості другої та третьої опори радіальних підшипників марок 6120 і 6118 відповідно, дані яких наведені в таблиці 2. Згинальні переміщення перерізів валу при його розтягуванні-стисканні та згинанні в площинах  $uoz$  і  $hoz$ . представлені у таблиці 3 (рядки 4, 5, 6).

Використання у якості другої і третьої опори радіальних (жорсткіших) підшипників марок 6120 і 6118 зменшує рівень переміщень на 25-30%.

Таблиця 3. Розподіл прогинів у перерізах валу.

Прогин	Координата $z_i$ , мм								
	0	12,5	25	42	59	170	299	362	424
1. Площина $uoz$ (у, мкм)	12,1	11,0	10,0	8,7	7,4	-0,75	-8,5	-13,5	-19,5
2. Площина $hoz$ (х, мкм)	5,7	5,3	4,9	4,4	3,9	1,3	0,41	0,97	2,5
3. Поздовжні переміщення (z, мкм)	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9	5,9
4. Площина $uoz$ (у, мкм)	8,66	7,78	6,85	5,7	4,6	-2,6	-9,4	-14,0	-19,5
5. Площина $hoz$ (х, мкм)	3,9	3,7	3,3	3,0	2,6	0,69	0,54	1,47	3,35
6. Поздовжні переміщення (z, мкм)	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8	2,8

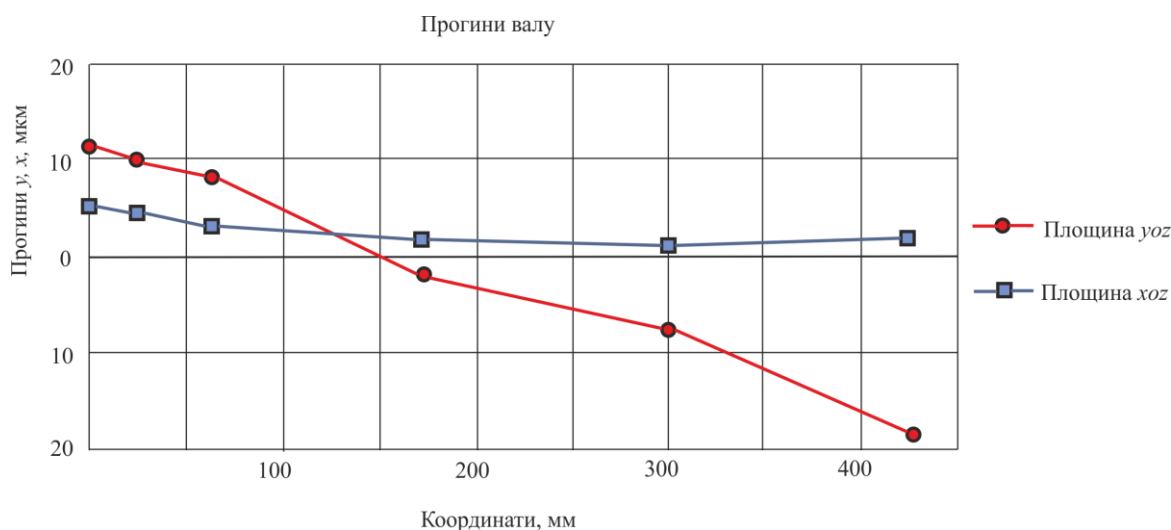


Рисунок 3. Розподіл прогинів валу.

Порівняння з результатами, отриманими при розрахунку радіальних жорсткостей підшипників за моделлю Джонса-Харріса та за допомогою моделі роботи [30] для робочого перерізу валу (початок координат) роздільно для вигину в площинах  $hoz$  (4,8мкм) та  $uoz$  (6,9мкм), показало, що у цьому розрахунку переміщення збільшуються на 30%. Так як коефіцієнт жорсткості контакту кульки з обоймами  $k$  в моделі Джонса-Харріса ( $k \approx 1,4 \cdot 10^5$ ) на 40% більше ніж у даній моделі ( $k \approx 1,0 \cdot 10^5$ ), очевидно, що застосування моделі Джонса-Харріса для шарикопідшипників і дає занижені значення переміщень валу 30%.

**Висновки.** У цій роботі запропоновано універсальний підхід та математичну модель для статичного аналізу багато опорних ступінчастих шпиндельних валів на нелінійно - пружних опорах пов'язаної жорсткості.

Для опису жорсткості шарикопідшипників введена матриця жорсткості, що зв'язує радіальні деформації у двох взаємно перпендикулярних напрямках та поздовжню деформацію з відповідними зусиллями. Формування матриці жорсткості здійснюється ітераційним шляхом методом Ньютона-Рафсона.

На основі диференціального рівняння вигнутої осі балки моделі Тимошенко у матричній формі, за допомогою модифікованого методу початкових параметрів, отримано роздільну систему рівнянь, не лінійність якої формується залежністю матриці жорсткості підшипників від зусиль, що діють на них.

Для вирішення нелінійної системи рівнянь застосовано метод послідовних ітерацій.

У пакеті MatLAB розроблено програмне забезпечення, що реалізує статичний аналіз багато опорних ступінчастих валів на нелінійно пружних опорах пов'язаної жорсткості.

Як приклад, розглянуто статичний аналіз шпindelного валу фрезерного верстата на трьох опорно-упорних підшипниках, розрахункова схема якого включала шість ділянок різної жорсткості.

Проведено порівняння з результатами, отриманими в роботі [30] для робочого перерізу валу (початок координат) окремо для вигину в площині хоз і уоз з розрахунком підшипників радіальних жорсткостей за моделлю Джонса-Харріса. Порівняння показало збільшення рівня розрахункових переміщень на 30%.

Перевага запропонованого підходу полягає у можливості уточненого статичного аналізу багато ступінчастих шпindelних валів на нелінійно - пружних опорах, жорсткість яких описується матрицею з трьома ступенями вільності. У пакеті MatLAB створено універсальну комп'ютерну програму, яка дозволяє підвищити точність статичного аналізу та якість проектування високоточних шпindelних вузлів.

**Додаток А.** Функції  $\Phi_{y1}(z_i)$ ,  $\Phi_{y1}^*(z_i)$ ,  $\Phi_{y2}(z_i)$ ,  $\Phi_{y2}^*(z_i)$  для вигнутої осі балки в площині уоз мають вигляд [30]:

$$\begin{aligned} \Phi_{y1}(z_i) = & M_{xc} \frac{z_i^2}{2} + F_{yc} \frac{z_i^3}{6} + k_{mk}^{\bullet} M_{xd} \frac{(z_i - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}))^2 \delta_k(z_i)}{2} + k_{mk}^{\bullet} F_{yd} \frac{(z_i - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}))^3 \delta_k(z_i)}{6} + \\ & + \sum_{l=0}^{i-1} k_{ml}^{\bullet} R_{ly} \frac{(z_i - \sum_{e=0}^{l-1} L_e)^3 \delta_l(z_i)}{6} + \sum_{m=1}^{M-1} (k_{m+1}^{\bullet} - k_m^{\bullet}) \left\{ M_{xc} + F_{yc} z_m^{\bullet} + M_{xd} \delta_k(z_m^{\bullet}) + \right. \\ & + F_{yd} \left[ z_m^{\bullet} - \left( \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k} \right) \right] \delta_k(z_m^{\bullet}) + \sum_{n=1}^N \left[ R_{ny} (z_m^{\bullet} - \sum_{e=1}^n L_e) \delta_n(z_m^{\bullet}) \right] \left. \right\} \frac{(z_i - z_m^{\bullet})^2}{2} + \\ & + \left[ F_{yc} + F_{yd} \delta_k(z_m^{\bullet}) + \sum_{n=1}^N R_{ny} \delta_n(z_m^{\bullet}) \right] \frac{(z_i - z_m^{\bullet})^3}{6} \delta_m(z_i) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{y1}^*(z_i) = & M_{xc} z_i + F_{yc} \frac{z_i^2}{2} + k_{mk}^{\bullet} M_{xd} (z_i - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k})) \delta_k(z_i) + k_{mk}^{\bullet} F_{yd} \frac{(z_i - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}))^2 \delta_k(z_i)}{2} + \\ & + \sum_{l=0}^{i-1} k_{ml}^{\bullet} R_{ly} \frac{(z_i - \sum_{e=0}^{l-1} L_e)^2 \delta_l(z_i)}{2} + \sum_{m=1}^{M-1} (k_{m+1}^{\bullet} - k_m^{\bullet}) \left\{ M_{xc} + F_{yc} z_m^{\bullet} + M_{xd} \delta_k(z_m^{\bullet}) + \right. \\ & + F_{yd} \left[ z_m^{\bullet} - \left( \sum_{j=1}^{k-1} L_j + L_{1k} \right) \right] \delta_k(z_m^{\bullet}) + \sum_{n=1}^N \left[ R_{ny} (z_m^{\bullet} - \sum_{e=1}^n L_e) \delta_n(z_m^{\bullet}) \right] \left. \right\} (z_i - z_m^{\bullet}) + \\ & + \left[ F_{yc} + F_{yd} \delta_k(z_m^{\bullet}) + \sum_{n=1}^N R_{ny} \delta_n(z_m^{\bullet}) \right] \frac{(z_i - z_m^{\bullet})^2}{2} \delta_m(z_i), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Phi_{y2}(z_i) = \left\langle \left[ F_{yc} z_i + k_{mk}^{\bullet\bullet} F_{yd} \left( z_i - \left( \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k} \right) \right) \delta_k(z_i) \right] + \sum_{l=0}^{i-1} \left[ k_{ml}^{\bullet\bullet} R_{ly} \left( z_i - \sum_{e=0}^{i-1} L_e \right) \delta_l(z_i) \right] + \sum_{m=1}^{M-1} \left\{ (k_{m+1}^{\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet}) \left[ F_{yc} + F_{yd} \delta_k(z_m^{\bullet}) + \sum_{n=1}^N R_{ny} \delta_n(z_m^{\bullet}) \right] (z_i - z_m^{\bullet}) \right\} \delta_m(z_i) \right\rangle, \quad (15)$$

$$\Phi_{y2}^*(z_i) = \left\langle \left[ F_{yc} + k_{mk}^{\bullet\bullet} F_{yd} \delta_k(z_i) \right] + \sum_{l=0}^{i-1} k_{ml}^{\bullet\bullet} \left[ R_{ly} \delta_l(z_i) \right] + \sum_{m=1}^{M-1} \left\{ (k_{m+1}^{\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet}) \left[ F_{yc} + F_{yd} \delta_k(z_m^{\bullet}) + \sum_{n=1}^N R_{ny} \delta_n(z_m^{\bullet}) \right] \right\} \delta_m(z_i) \right\rangle \quad (16)$$

Вирази для функцій  $\Phi_{x1}(z_i)$ ,  $\Phi_{x2}(z_i)$ ,  $\Phi_{x2}^*(z_i)$ ,  $\Phi_{x2}^*(z_i)$  для вигнутої осі балки в площині  $хоz$  можуть бути отримані з виразів для  $\Phi_{y1}(z_i)$ ,  $\Phi_{y1}^*(z_i)$ ,  $\Phi_{y2}(z_i)$ ,  $\Phi_{y2}^*(z_i)$  шляхом заміни індексу  $y$  на  $x$ .

Вираз  $\Phi_z(z_i)$  для функції має вигляд

$$\Phi_z(z_i) = F_{zc} z_i + k_{mk}^{\bullet\bullet\bullet} F_{zd} \left( z_i - \left( \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k} \right) \right) \delta_k(z_i) + \sum_{l=0}^{i-1} k_{ml}^{\bullet\bullet\bullet} R_{lz} \left( z_i - \sum_{e=0}^{i-1} L_e \right) \delta_l(z_i) + \sum_{m=1}^{M-1} (k_{m+1}^{\bullet\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet\bullet}) \left\{ F_{zc} z_m^{\bullet} + F_{zd} \left[ z_m^{\bullet} - \left( \sum_{j=1}^{k-1} L_j + L_{1k} \right) \right] \delta_k(z_m^{\bullet}) + \sum_{n=1}^N \left[ R_{nz} \left( z_m^{\bullet} - \sum_{e=1}^n L_e \right) \delta_n(z_m^{\bullet}) \right] \right\} \delta_m(z_n)$$

$k_{mk}^{\bullet}$ ,  $k_{mk}^{\bullet\bullet}$ ,  $k_{mk}^{\bullet\bullet\bullet}$  - коефіцієнти приведення для ділянки, на якій прикладаються зусилля, що діють з боку приводу,  $k_{ml}^{\bullet}$ ,  $k_{ml}^{\bullet\bullet}$ ,  $k_{ml}^{\bullet\bullet\bullet}$  - коефіцієнти приведення для ділянки, на якій діє реактивне зусилля  $R_l$ .

$$\begin{aligned} \delta_l(z_i) &= 1 \text{ при } z_i \geq \sum_{j=0}^{i-1} L_j, \quad \delta_l(z_i) = 0 \text{ при } z_i \leq \sum_{j=0}^{i-1} L_j, \\ \delta_k(z_i) &= 1 \text{ при } z_i \geq \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}, \quad \delta_k(z_i) = 0 \text{ при } z_i \leq \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}, \\ \delta_m(z_i) &= 1 \text{ при } z_i \geq z_m^{\bullet}, \quad \delta_m(z_i) = 0 \text{ при } z_i \leq z_m^{\bullet} \\ \delta_k(z_m^{\bullet}) &= 1 \text{ при } z_m^{\bullet} \geq \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}, \quad \delta_k(z_m^{\bullet}) = 0 \text{ при } z_m^{\bullet} \leq \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}, \\ \delta_n(z_m^{\bullet}) &= 1 \text{ при } z_m^{\bullet} \geq \sum_{e=1}^n L_e, \quad \delta_n(z_m^{\bullet}) = 0 \text{ при } z_m^{\bullet} \leq \sum_{e=1}^n L_e. \\ i &= 1, 2, 3, \dots, N; \quad m = 1, 2, 3, \dots, M, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N. \quad R_0 = 0, \quad L_0 = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$k$  - номер опори, за якою прикладені зусилля приводу  $F_{xd}$ ,  $F_{yd}$ ,  $F_{zd}$ ,  $M_{xd}$ ,  $M_{yd}$ .

**Додаток В.** Умови сполучення на опорах (9) формуються виходячи з того, що переміщення осі валу (внутрішнього кільця)  $u_n(z_n)$ ,  $v_n(z_n)$ ,  $w_n(z_n)$  на  $n$ -тій опорі, що має координату  $z_n$ , пов'язані з реакціями опори  $R_{nx}$ ,  $R_{ny}$ ,  $R_{nz}$  через матрицю жорсткості  $K_n^{\bullet}$  і представлені, наприклад, в роботі [11]:

Коефіцієнти матриці жорсткості  $K_n^\bullet = \begin{bmatrix} k_{xx}^\bullet & k_{xy}^\bullet & k_{xz}^\bullet \\ k_{yx}^\bullet & k_{yy}^\bullet & k_{yz}^\bullet \\ k_{zx}^\bullet & k_{zy}^\bullet & k_{zz}^\bullet \end{bmatrix}$  для опорно-упорного підшипника мають вигляд

[11]:

$$\begin{aligned} k_{xx}^\bullet &= k_\varepsilon \cos^2 \alpha \left[ \cos^2 \psi_r * J_{aa}(\varepsilon) + (\sin^2 \psi_r - \cos^2 \psi_r) J_{rr}(\varepsilon) \right], \\ k_{yy}^\bullet &= k_\varepsilon \cos^2 \alpha \left[ \sin^2 \psi_r * J_{aa}(\varepsilon) + (\cos^2 \psi_r - \sin^2 \psi_r) J_{rr}(\varepsilon) \right], \\ k_{xy}^\bullet &= k_{yx}^\bullet = k_\varepsilon \cos^2 \alpha \sin \psi_r \cos \psi_r [2J_{rr}(\varepsilon) - J_{aa}(\varepsilon)], \\ k_{xz}^\bullet &= k_{zx}^\bullet = k_\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha \sin \psi_r * J_{ra}(\varepsilon), \\ k_{yz}^\bullet &= k_{zy}^\bullet = k_\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha \cos \psi_r * J_{ra}(\varepsilon), \\ k_{zz}^\bullet &= k_\varepsilon \sin^2 \alpha * J_{aa}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

де  $k_\varepsilon = kD^{0,5}Z(w_n \sin \alpha + \Delta_r \cos \alpha)^{m-1}$  - характеристика жорсткості підшипника;  $k$  - коефіцієнт жорсткості,  $k \approx 1,0 \cdot 10^5$  [11],  $D$  - діаметр кульок;  $Z$  - кількість кульок у підшипнику;  $m=1,5$  [6], [11],  $(k_\varepsilon)^{-1} = (kZ)^{-1}(w_n \sin \alpha + \Delta_r \cos \alpha)^{1-m}$  - характеристика податливості підшипника;  $w_n$  - осьове переміщення внутрішнього кільця підшипника;  $\Delta_r = (u_n^2 + v_n^2)^{0,5}$  - повне радіальне переміщення внутрішнього кільця підшипника;

$u_n, v_n$  - радіальні переміщення внутрішнього кільця підшипника у напрямі осей  $x$  та  $y$  відповідно;  $\alpha$  - контактний кут;  $\varepsilon = 0,5(1 + \frac{w_n}{\Delta_r} \operatorname{tg} \alpha)$  - коефіцієнт, що визначає внесок кожної кульки в жорсткість підшипника,

$J_{aa}(\varepsilon), J_{rr}(\varepsilon), J_{ra}(\varepsilon)$  - інтеграли Сьяволла [11,31], за допомогою яких розраховується розподіл зусиль між кульками [6], [11];  $\psi_r$  - кут, що визначає напрямок повного радіального переміщення:

$$\psi_r = \operatorname{arctg}\left(\frac{u_n}{v_n}\right), \text{ при } v_n > 0, \quad \psi_r = \operatorname{arctg}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) + \pi, \text{ при } v_n \leq 0. \quad (20)$$

Коефіцієнти матриці  $K_n^\bullet = \begin{bmatrix} k_{xx}^\bullet & k_{xy}^\bullet \\ k_{yx}^\bullet & k_{yy}^\bullet \end{bmatrix}$  для радіального підшипника можуть бути отримані з відповідних

коефіцієнтів матриці  $K_n^\bullet$  для опорно-упорного підшипника при  $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned} k_{xx}^\bullet &= k_\varepsilon \left[ \cos^2 \psi_r * J_{aa}(\varepsilon) + (\sin^2 \psi_r - \cos^2 \psi_r) J_{rr}(\varepsilon) \right], \\ k_{yy}^\bullet &= k_\varepsilon \left[ \sin^2 \psi_r * J_{aa}(\varepsilon) + (\cos^2 \psi_r - \sin^2 \psi_r) J_{rr}(\varepsilon) \right], \\ k_{xy}^\bullet &= k_{yx}^\bullet = k_\varepsilon \sin \psi_r \cos \psi_r [2J_{rr}(\varepsilon) - J_{aa}(\varepsilon)], \\ k_{xz}^\bullet &= k_{zx}^\bullet = k_{yz}^\bullet = k_{zy}^\bullet = k_{zz}^\bullet = 0, \quad k_\varepsilon = kZ(\Delta_r)^{m-1}, \quad \varepsilon = 0,5. \end{aligned} \quad (21)$$

Матриця податливості  $K_n$  формується як матриця, обернена до матриці жорсткості  $K_n = (K_n^\bullet)^{-1}$ , в якій  $(k_\varepsilon)^{-1} = (kZ)^{-1}(\Delta_r)^{1-m}$ .

Для обчислення інтегралів Сьяволла використовувалися апроксимуючі залежності з роботи [11].

Формування матриці жорсткості є нелінійною проблемою, оскільки рівняння (8) визначає переміщення для заданого набору зусиль через матрицю жорсткості, а коефіцієнти матриці жорсткості, у свою чергу, залежать від цих переміщень. Для вирішення цієї проблеми для розрахунку коефіцієнтів матриці жорсткості застосовується ітераційний метод Ньютона-Рафсона, вирішальне рівняння для якого має вигляд:

$$q_{n,i+1} = \frac{1}{m} (K_n^\bullet)_i^{-1} R_n + \frac{m-1}{m} q_{n,i},$$

і дозволяє по набору реактивних зусиль для  $n$ -тої опори  $R_n$  отримати матрицю податливості;  $(K_n^\bullet)^{-1}$ ;  $i$  – номер ітерації.

**Додаток С.** Коефіцієнти матриць  $A_{xx}, A_{xy}, A_{yx}, A_{yy}, A_{zx}, A_{zy}, A_{xz}, A_{yz}, A_{zz}$ , компоненти вектора – стовпця правих частин  $B$ . Компоненти матриці жорсткості обчислюються за допомогою залежностей (13) - (18) з додатка А та (19) - (21) з додатка В.

Коефіцієнти матриці  $A_{xx}$  можуть бути отримані відповідно до [30] і мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 a_{n1} &= 1, \quad a_{n2} = \sum_{j=1}^n L_j, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\
 a_{N+1j} &= 1, \quad j = 3, \dots, N+2, \\
 a_{N+1j} &= a_{N+2j} = 0, \quad j = 1, 2, \\
 a_{N+2j} &= \sum_{m=1}^{j-2} L_m, \quad j = 3, \dots, N+2, \\
 a_{nj} &= \frac{k_{ml}^\bullet \left( \sum_{m=j-1}^n L_m \right)^3}{6EI_1} + \frac{1}{EI_1} \sum_{m=1}^{M-1} \left\{ (k_{m+1}^\bullet - k_m^\bullet) \sum_{l=j-2}^N \left[ \left( z_m^\bullet - \sum_{e=1}^l L_e \right) * \frac{(z_n - z_m^\bullet)^2}{2} + \frac{(z_n - z_m^\bullet)^3}{6} \right] \delta_l(z_m^\bullet) \right\} \delta_m(z_n) - \\
 &\quad - \frac{K_{f1}}{GA_1} \left\{ k_{ml}^{\bullet\bullet} \sum_{m=j-1}^n L_m + \sum_{m=1}^{M-1} \left[ (k_{m+1}^{\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet}) \sum_{l=j-2}^N (z_n - z_m^\bullet) \delta_l(z_m^\bullet) \delta_m(z_n) \right] \right\}, \\
 &\quad n = 2, \dots, N, \quad j < n+2, \quad j = 3, 4, \dots, N+1. \\
 a_{nj} &= k_{xx}^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad j = n+2, \\
 a_{nj} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad j > n+2, \quad j = n+3, n+4, \dots, N+2.
 \end{aligned}$$

Коефіцієнти матриці  $A_{yy}$  розмірністю  $(N+2) \times (N+2)$ , збігаються з коефіцієнтами матриці  $A_{xx}$  із заміною  $a_{nj} = k_{xx}^n$ , на  $a_{nj} = k_{yy}^n$ .

Структура матриць  $A_{xy}$   $(N+2) \times (N+2)$  і  $A_{xz}$  розмірністю  $(N+2) \times (N+1)$  визначається залежностями (12), коефіцієнти матриць дорівнюють нулю за винятком  $a_{nj} = k_{xy}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = n+2$  для матриці  $A_{xy}$  та  $a_{nj} = k_{xz}^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = n+1$  для матриці  $A_{xz}$ .

Коефіцієнти матриці  $A_{zz}$  розмірністю  $(N+1) \times (N+1)$  можуть бути отримані із залежностей (12) і мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 a_{n1} &= 1, \quad n = 1, 2, \dots, N, \\
 a_{nj} &= \frac{k_{ml}^{\bullet\bullet\bullet} \sum_{m=j}^n L_m}{EA_1} + \frac{1}{EA_1} \sum_{m=1}^{M-1} \left\{ (k_{m+1}^{\bullet\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet\bullet}) \sum_{l=j-1}^N \left[ \left( z_m^\bullet - \sum_{e=1}^l L_e \right) \right] \delta_l(z_m^\bullet) \right\} \delta_m(z_n), \\
 &\quad n = 2, \dots, N, \quad j < n+1, \quad j = 2, 3, \dots, N. \\
 a_{nj} &= k_{zz}^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad j = n+1, \\
 a_{nj} &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad j > n+1, \quad j = n+2, n+3, \dots, N+1. \\
 a_{N+11} &= 0, \quad a_{N+1j} = 1, \quad j = 2, \dots, N+1,
 \end{aligned}$$

Структура вектора правих частин включає три складові  $X^T = [X_x^T, X_y^T, X_z^T]$ , де компоненти векторів  $X_x^T = [b_{1x}, b_{2x}, \dots, b_{N+2x}]^T$ ,  $X_y^T = [b_{1y}, b_{2y}, \dots, b_{N+2y}]^T$ ,  $X_z^T = [b_{1z}, b_{2z}, \dots, b_{N+1z}]^T$  відповідно (13) - (16), (18) представляються залежностями [30]:

$$b_{ny} = -\frac{\overline{\Phi_1(z_n)}}{EI_1} + \frac{K_{f1}}{GA_1} \overline{\Phi_2(z_n)}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$\overline{\Phi_1(z_n)} = M_{xc} \frac{z_n^2}{2} + F_{yc} \frac{z_n^3}{6} + k_{mk}^{\bullet} M_{xd} \frac{(z_n - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}))^2 \delta_k(z_n)}{2} + k_{mk}^{\bullet} F_{yd} \frac{(z_n - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}))^3 \delta_k(z_n)}{6} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M-1} (k_{m+1}^{\bullet} - k_m^{\bullet}) \left\{ M_{xc} + F_{yc} z_m^{\bullet} + M_{xd} \delta_k(z_m^{\bullet}) + F_{yd} \left[ z_m^{\bullet} - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}) \right] \delta_k(z_m^{\bullet}) \right\} \frac{(z_n - z_m^{\bullet})^2}{2} +$$

$$+ \left[ F_{yc} + F_{yd} \delta_k(z_m^{\bullet}) \right] \frac{(z_n - z_m^{\bullet})^3}{6} \delta_m(z_n),$$

$$\overline{\Phi_2(z_n)} = \left\langle \left[ F_{yc} z_n + k_{mk}^{\bullet\bullet} F_{yd} (z_n - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k})) \delta_k(z_n) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{M-1} (k_{m+1}^{\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet}) \left[ F_{yc} + F_{yd} \delta_k(z_m^{\bullet}) \right] (z_n - z_m^{\bullet}) \delta_m(z_n) \right\rangle,$$

$$b_{N+1y} = -F_{yc} - F_{yd},$$

$$b_{N+2y} = M_{xc} + M_{xd} - F_{yd} (\sum_{j=1}^{k-1} L_j + L_{1k}).$$

Компоненти вектора  $X_x^T$  можуть бути отримані з компонент вектора  $X_y^T$  шляхом заміни індексів  $y$  на  $x$  і  $x$  на  $y$ .

Компоненти вектора  $X_z^T$  відповідно (12), (17), (18) визначаються співвідношеннями:

$$b_{nz} = -\frac{\overline{\Phi_z(z_n)}}{EA_1}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$\overline{\Phi_z(z_i)} = F_{zc} z_i + k_{mk}^{\bullet\bullet\bullet} F_{zd} (z_i - (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k})) \delta_k(z_i) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M-1} (k_{m+1}^{\bullet\bullet\bullet} - k_m^{\bullet\bullet\bullet}) \left\{ F_{zc} z_m^{\bullet} + F_{zd} \left[ z_m^{\bullet} - (\sum_{j=1}^{k-1} L_j + L_{1k}) \right] \delta_k(z_m^{\bullet}) \right\} \delta_m(z_i),$$

$$b_{N+1z} = -F_{zc} - F_{zd} = 0.$$

У наведених співвідношеннях прийнято позначення:

$$\delta_k(z_n) = 1 \text{ при } z_n \geq (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}), \quad \delta_k(z_n) = 0 \text{ при } z_n \leq (\sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}),$$

$$\delta_m(z_n) = 1 \text{ при } z_n \geq z_m^{\bullet}, \quad \delta_m(z_n) = 0 \text{ при } z_n \leq z_m^{\bullet}$$

$$\delta_k(z_m^{\bullet}) = 1 \text{ при } z_m^{\bullet} \geq \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k}, \quad \delta_k(z_m^{\bullet}) = 0 \text{ при } z_m^{\bullet} \leq \sum_{j=1}^k L_j + L_{1k},$$

$$\delta_l(z_m^{\bullet}) = 1 \text{ при } z_m^{\bullet} \geq \sum_{e=1}^l L_e, \delta_l(z_m^{\bullet}) = 0 \text{ при } z_m^{\bullet} \leq \sum_{e=1}^l L_e$$

$$z_n = \sum_{j=1}^n L_j, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N;$$

$$R_0 = 0, L_0 = 0.$$

#### Список літератури

1. Решетов Д.Н. Расчет валов (шпинделей) с учетом упругого взаимодействия их с опорами. М.: Mashgiz, 1939.75с.
2. Shareef, K.J.H, Brandon, J.A., "On the Quasi-Static Design of Machine Tool Spindles, " Journal of Engineering Manufacture, Voi. 204, 1990, pp. 91-104.
3. Lewinchai, L., "Machine Tool Spindle Applications, " SKF Industries, Inc. Engineering and Research, SKF Norden, Feb 1983..
4. Jones A. B. New departure engineering data: analysis of stresses and deflections. New Departure Division, General Motors Corporation, Vol. 2, 1946.
5. Palmgren A. Ball and Roller Bearing Engineering. SKF Industries Inc., Philadelphia, 1959.
6. Harris T. A. Rolling Bearing Analysis. Wiley, New York, 1984
7. Gargiulo E. A simple way to estimate bearing stiffness. Machine Design, Vol. 52, Issue 17, 1980, p. 107-110.
8. Lim T. C., Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings, part I: bearing stiffness formulation. Journal of Sound and Vibration, Vol. 139, Issue 2, 1990, p. 179-199.
9. Lim T. C., Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings, part II: system studies. Journal of Sound and Vibration, Vol. 139, Issue 2, 1990, p. 201-225.
10. Lim T. C., Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings, part V: effect of distributed contact load on roller bearing stiffness matrix. Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, Issue 4, 1994, p. 547-553.
11. Hernot X., Sartor M., Guillot J. Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach. Journal of Mechanical Design, Vol. 122, Issue 1, 2000, p. 83-90.
12. Guo Y., Parker R. G. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model. Mechanism and Machine Theory, Vol. 51, 2012, p. 32-45.
13. Cao Y and Altintas Y (2007), A general method for the modelling of spindle-bearing systems, *J. Mech. Des. Transactions of the ASME* **126**: pp. 1089-1104. DOI:10.1115/1.1802311
14. Cao H, Li B and He Z (2013), Finite Element Model Updating of Machine-Tool Spindle Systems, *Journal of Vibration and Acoustics* **135**: 0245031-0245034. DOI: 10.1115/1.4023045 4
15. ANALYSIS OF LATHE SPINDLE USING ANSYS <sup>1</sup>Dr. S. Shivakumar <sup>1</sup>Dr. Anupama N Kallol, <sup>2</sup>Vishwanath Khadakhbavi International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 9, September-2013, pp. 431 – 440.
16. STATIC STIFFNESS ANALYSIS OF HIGH FREQUENCY MILLING SPINDLE Anandkumar Telang IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology eISSN: 2319-1163 | pISSN: 2321-7308 Volume: 03 Special Issue: 03 | May-2014 | NCRIET-2014,
17. DESIGN AND ANALYSIS OF BORING BAR USING ANSYS J.Premkumar<sup>1</sup>, V.Mani Kumar<sup>2</sup>, Theenathayalan. K3 *International Journal For Technological Research In Engineering Volume 5, Issue 11, July-2018*, pp. 4584 – 4587
18. Andrei GHEORGHITĂ1, Dragoş AROTĂRIŢE1,\*, Marius TURNEA3, George CONSTANTIN4 MODELING AND SIMULATION OF HIGH SPEED SPINDLE, CURRENT PROBLEMS AND OPTIMIZATIONS – A SURVEY Proceedings in Manufacturing Systems, Volume 11, Issue 4, 2016, 215-222
19. Yu.M. Danylchenko • M.G. Storchak Static calculation of the “Spindle unit” elastic system by using transfer matrices method Mechanics and Advanced Technologies #1 (79), 2017 11-18
20. V.Mallikarjuna Reddy<sup>1</sup>,K.Rajasekhara Reddy<sup>2</sup>, V.Purushotham<sup>3</sup> Design And Analysis Of Spindle International Journal of Creative Research Thoughts (IJCRT) Volume 6, Issue 2 April 2018 399 403
21. Ayush Anand<sup>1,2</sup>, Himel Roy <sup>1,2</sup> Static and Dynamic Analysis of Lathe Spindle using ANSYS International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 Volume 13, Number 9 (2018) pp. 6994-7000
22. Chuan-Hai Chen; Rui Wang; Zi-Dong Zhou; Zi-Jia Wang; Hao-Nan Cui; Nai-Kou Zhang Static and Dynamic Characteristics Analysis of Spindle for Turning and Milling Process 2019 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering (QR2MSE) 6-9 Aug. 2019 : Zhangjiajie, China
23. Peng T., Lim T. C. dynamics of hypoid gears with emphasis on effect of shaft rotation on vibratory response. ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2007.
24. Peng T., Lim T. C. Influence of gyroscopic effect on hypoid and bevel geared system dynamics. SAE International Journal of Passenger Cars-Mechanical Systems, Vol. 2, Issue 1, 2009, p. 1377-1386.
25. Yang J., Lim T. C. Dynamics of coupled nonlinear hypoid gear mesh and time-varying bearing stiffness systems. Dynamics, Vol. 1, 2011, p. 1548.
26. Fawzi M.A. El-Saeidy Time-varying total stiffness matrix of a rigid machine spindle-angular contact ball bearings assembly: Theory and analytical/experimental verifications Shock and Vibration 18 (2011) 641–670.
27. A. Bourdon, J. F. Rigal, D. Play Static Rolling Bearing Models in a CAD. Environment for the Study of Complex Mechanisms: Part II—Complete Assembly Model Journal of Tribology Copyright © 1999 by ASME APRIL 1999, Vol. 121, p. 215 – 223.
28. O. Kyrkach, V. Khavin, I. Khavina, "A computational technique for the static analysis of multi-support spindle shafts with nonlinear elastic bearings", Proceedings of 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology Conference, Kharkiv, Ukraine, 5-10 Oct. 2020, pp. 402-406.
29. В.Лі. Хавін, О.Б. Киркач, Б.Н. Киркач “Статичний аналіз багатоопорних шпиндельних валів на нелінійно пружних опорах”. Вісник НТУ “ХПІ” №2, 2021р., с.94-100. Сер. “Динаміка та міцність машин”.
30. В.Лі. Хавін, О.Б. Киркач, Б.Н. Киркач “Статичний аналіз багатоопорних ступінчатих шпиндельних валів на нелінійно пружних опорах”. Вісник НТУ “ХПІ” № 2, 2022р. с. 48-55. Сер. “Динаміка та міцність машин”.
31. H. Sjøvall, “Belastningsfordelningen inom kul-och rullager vid givna yttre radial-och axialbelastningar,” *Teknisk Tidskrift. Mekanik*, 1933.

#### Bibliography (transliterated):

1. D.N. Reshetov, "Расчет валов (шпинделей) с учетом упругого взаимодействия их с опорами", Mashgiz, 1939.75с.
2. Shareef, K.J.H, Brandon, J.A., "On the Quasi-Static Design of Machine Tool Spindles, " Journal of Engineering Manufacture, Voi. 204, 1990, pp. 91-104.
3. Lewinchai, L., "Machine Tool Spindle Applications, " SKF Industries, Inc. Engineering and Research, SKF Norden, Feb 1983.



- Jones A. B. New departure engineering data: analysis of stresses and deflections. New Departure Division, General Motors Corporation, Vol. 2, 1946.
4. Palmgren A. Ball and Roller Bearing Engineering. SKF Industries Inc., Philadelphia, 1959.
6. Harris T. A. Rolling Bearing Analysis. Wiley, New York, 1984
7. Gargiulo E. A simple way to estimate bearing stiffness. Machine Design, Vol. 52, Issue 17, 1980, p. 107-110.
8. Lim T. C., Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings, part I: bearing stiffness formulation. Journal of Sound and Vibration, Vol. 139, Issue 2, 1990, p. 179-199.
9. Lim T. C., Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings, part II: system studies. Journal of Sound and Vibration, Vol. 139, Issue 2, 1990, p. 201-225.
10. Lim T. C., Singh R. Vibration transmission through rolling element bearings, part V: effect of distributed contact load on roller bearing stiffness matrix. Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, Issue 4, 1994, p. 547-553.
11. Hernot X., Sartor M., Guillot J. Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach. Journal of Mechanical Design, Vol. 122, Issue 1, 2000, p. 83-90.
12. Guo Y., Parker R. G. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model. Mechanism and Machine Theory, Vol. 51, 2012, p. 32-45.
13. Cao Y and Altintas Y (2007), A general method for the modelling of spindle-bearing systems, *J. Mech. Des. Transactions of the ASME* **126**: pp. 1089-1104. DOI:10.1115/1.1802311
14. Cao H, Li B and He Z (2013), Finite Element Model Updating of Machine-Tool Spindle Systems, *Journal of Vibration and Acoustics* **135**: 0245031-0245034. DOI: 10.1115/1.4023045 4
15. ANALYSIS OF LATHE SPINDLE USING ANSYS <sup>1</sup> Dr. S. Shivakumar <sup>1</sup> Dr. Anupama N Kallol, <sup>2</sup> Vishwanath Khadakhbavi International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 9, September-2013, pp. 431 – 440.
16. STATIC STIFFNESS ANALYSIS OF HIGH FREQUENCY MILLING SPINDLE Anandkumar Telang IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology eISSN: 2319-1163 | pISSN: 2321-7308 Volume: 03 Special Issue: 03 | May-2014 | NCRIET-2014,
17. DESIGN AND ANALYSIS OF BORING BAR USING ANSYS J.Premkumar<sup>1</sup>, V.Mani Kumar<sup>2</sup>, Theenathayalan. K3 *International Journal For Technological Research In Engineering Volume 5, Issue 11, July-2018*, pp. 4584 – 4587
18. Andrei GHEORGHIȚĂI, Dragoș AROTĂRIȚE<sup>2</sup>\*, Marius TURNEA<sup>3</sup>, George CONSTANTIN<sup>4</sup> MODELING AND SIMULATION OF HIGH SPEED SPINDLE, CURRENT PROBLEMS AND OPTIMIZATIONS – A SURVEY Proceedings in Manufacturing Systems, Volume 11, Issue 4, 2016, 215-222
19. Yu.M. Danylchenko • M.G. Storchak Static calculation of the “Spindle unit” elastic system by using transfer matrices method Mechanics and Advanced Technologies #1 (79), 2017 11-18
20. V.Mallikarjuna Reddy<sup>1</sup>,K.Rajasekhara Reddy<sup>2</sup>, V.Purushotham<sup>3</sup> Design And Analysis Of Spindle International Journal of Creative Research Thoughts (IJCRT) Volume 6, Issue 2 April 2018 399 403
21. Ayush Anand<sup>1,2</sup>, Himel Roy <sup>1,2</sup> Static and Dynamic Analysis of Lathe Spindle using ANSYS International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 Volume 13, Number 9 (2018) pp. 6994-7000
22. Chuan-Hai Chen; Rui Wang; Zi-Dong Zhou; Zi-Jia Wang; Hao-Nan Cui; Nai-Kou Zhang Static and Dynamic Characteristics Analysis of Spindle for Turning and Milling Process 2019 International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering (QR2MSE) 6-9 Aug. 2019 : Zhangjiajie, China
23. Peng T., Lim T. C. dynamics of hypoid gears with emphasis on effect of shaft rotation on vibratory response. ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, American Society of Mechanical Engineers, 2007.
24. Peng T., Lim T. C. Influence of gyroscopic effect on hypoid and bevel geared system dynamics. SAE International Journal of Passenger Cars-Mechanical Systems, Vol. 2, Issue 1, 2009, p. 1377-1386.
25. Yang J., Lim T. C. Dynamics of coupled nonlinear hypoid gear mesh and time-varying bearing stiffness systems. Dynamics, Vol. 1, 2011, p. 1548.
26. Fawzi M.A. El-Saeidy Time-varying total stiffness matrix of a rigid machine spindle-angular contact ball bearings assembly: Theory and analytical/experimental verifications Shock and Vibration 18 (2011) 641–670.
27. A. Bourdon, J. F. Rigal, D. Play Static Rolling Bearing Models in a CAD. Environment for the Study of Complex Mechanisms: Part II—Complete Assembly Model Journal of Tribology Copyright © 1999 by ASME APRIL 1999, Vol. 121, p. 215 – 223.
28. O. Kyrkach, V. Khavin, I. Khavina, "A computational technique for the static analysis of multi-support spindle shafts with nonlinear elastic bearings", Proceedings of 2020 IEEE KhPI Week on Advanced Technology Conference, Kharkiv, Ukraine, 5-10 Oct. 2020, pp. 402-406.
29. V.L. Khavin, O.B. Kirkach, B.M. Kirkach "Statychnyy analiz bahatoopornykh shpyndel'nykh valiv na nelineinyo pruzhnykh oporakh". Visnyk NTU "KHPI" №2, 2021r., S.94-100. Ser. "Dynamika ta mitsnist' mashyn".
30. V.L. Khavin, O.B. Kirkach, B.M. Kirkach "Statychnyy analiz bahatoopornykh stupinchastykh shpyndel'nykh valiv na nelineinyo pruzhnykh oporakh". Visnyk NTU "KHPI" № 2, 2022r. s. 48-55. Ser. "Dynamika ta mitsnist' mashyn".
31. H. Sjøvall, "Belastningsfordelningen inom kul-och rullager vid givna yttre radial-och axialbelastningar," *Teknisk Tidskrift. Mekanik*, 1933.

Поступила (received) . . . 2024

*Відомості про авторів / About the Authors*

**Хавін Валерій Львович (Khavin Valerij)** – кандидат технічних наук, професор кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; e-mail: [Valerij.Havin@khpi.edu.ua](mailto:Valerij.Havin@khpi.edu.ua), ORCID: 0000-0002-4827-6474.

**Хавін Євгеній Валер'євич (Khavin Evgen)** – кандидат технічних наук, директор ТОВ «Світс-7»; e-mail: [ehavin@ukr.net](mailto:ehavin@ukr.net), ORCID: 0009-0007-3593-8102.

**Киркач Борис Миколайович (Kyrkach Borys)** – кандидат технічних наук, професор кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; e-mail: [Borys.Kyrkach@khpi.edu.ua](mailto:Borys.Kyrkach@khpi.edu.ua), ORCID: 0000-0002-0432-1296.

**Киркач Олексій Борисович (Kyrkach Oleksiy)** – інженер-механік-конструктор, ТОВ «Енейбл Україна»; e-mail: [olky@enabl.dk](mailto:olky@enabl.dk), ORCID: 0000-0003-4594-557X.