

ХАВІН В.Л., КИРКАЧ Б.М., ПОГОРІЛОВ С.Ю., ШЕРГІН С.Ю.

ЕФЕКТИВНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ НЕЛІНІЙНОЇ ЖОРСТКОСТІ ШАРИКОПІДШИПНИКІВ

Проведено аналіз особливостей статичного розрахунку шпиндельного вузла на жорсткість з урахуванням жорсткості опор. Зазначено, що при статичному аналізі шпиндельних валів, зазвичай, використовуються наближені довідкові значення жорсткості опор - підшипників кочення, що може дати похибку щодо оцінки жорсткості опори до 50%. У роботі представлений аналіз модифікованого методу Джонса-Харріса для розрахунку жорсткості підшипників, що забезпечує збільшення точності за рахунок нових констант у залежностях для радіальних жорсткостей радіальних та радіально-упорних шарикопідшипників. Використані замість моделі контакту по Герцу в модифікованій моделі Джонса-Харріса скінченноелементні моделі в контактній задачі «елемент кочення - підшипникові кільця» більш точно відображають геометрію та жорсткість доріжок кочення підшипника, що дозволяють отримати точніші константи для моделі нелінійної жорсткості шарикопідшипників. Перевагою модифікованої моделі є можливість автоматичного обліку технологічного зазору у підшипнику та швидкості обертання валу. Розрахунок жорсткості підшипників фірми SKF показав більшу точність, що підтверджується порівнянням з експериментом. Результати розрахунку жорсткості, отримані для ряду підшипників фірми SKF, можуть бути успішно використані для практичних розрахунків жорсткості радіальних і радіально-упорних шарикопідшипників інших фірм, конструктивно-технологічні характеристики яких відповідають характеристикам підшипників фірми SKF, розглянутих у роботі.

Ключові слова: шпиндельний вал, жорсткість опор, модифікований метод Джонса-Харріса, константи моделі жорсткості.

KHAVIN V., KYRKACH B., POGORILOV S., SHERGIN S. AN EFFECTIVE MODEL FOR CALCULATING THE NONLINEAR RIGIDITY OF BALL BEARINGS

An analysis of the features of the static calculation of the spindle assembly for stiffness, taking into account the stiffness of the supports, was carried out. It is noted that during the static analysis of spindle shafts, approximate reference values of the rigidity of supports - rolling bearings are usually used, which can give an error in estimating the stiffness of the support up to 50%. The paper presents an analysis of the modified Jones-Harris method for calculating the stiffness of bearings, which provides an increase in accuracy due to new constants in the dependencies for the radial stiffnesses of support and support-thrust ball bearings. The finite element models used instead of the Hertzian contact model in the modified Jones-Harris model in the contact problem "rolling element - bearing rings" more accurately reflect the geometry and stiffness of the bearing raceways, which allow obtaining more accurate constants for the nonlinear stiffness model of ball bearings. The advantage of the modified model is the possibility of automatic calculation of the technological gap in the bearing and the speed of rotation of the shaft. The calculation of the stiffness of SKF bearings showed greater accuracy, which is confirmed by comparison with the experiment. The results of the stiffness calculation obtained for a number of SKF bearings can be successfully used for practical stiffness calculations of radial and radial thrust ball bearings of other firms, the structural and technological characteristics of which correspond to the characteristics of the SKF bearings considered in the work.

Keywords: spindle shaft, support stiffness, modified Jones-Harris method, stiffness model constants.

Вступ. Основним вузлом, що визначає рівень точності при обробці різанням, є шпиндельний вузол верстата. Жорсткість шпиндельного вузла – головна характеристика, яка впливає на точність і продуктивність верстата і визначає стійкість динамічної системи верстата в процесі обробки різанням, є основним формоутворюючим елементом, що забезпечує робочі рухи верстата.

У сучасному верстатобудуванні спостерігається тенденція до мінімізації часу і витрат на розробку нових моделей верстатів, що вимагає вже на початковому етапі проектування розрахувати всі основні параметри і характеристики, використовуючи сучасні, вдосконалені підходи і методи.

У висококласних багатоцільових верстатах (обробних центрах) використовуються багатоопорні шпиндельні вузли. Також вони використовуються в шліфувальних, розточувальних та інших верстатах, де необхідно забезпечити більшу жорсткість шпиндельного вузла. У таких шпиндельних вузлах для швидкохідності та високої жорсткості традиційні циліндричні роликові підшипники замінюються кількома радіальними та (або) радіально-упорними шарикопідшипниками.

Особливістю статичного розрахунку шпиндельного вузла (по жорсткості і міцності) є розрахунок жорсткості валу шпинделя з урахуванням реальної жорсткості опор, особливо для багатоопорних валів, оскільки традиційні моделі з введенням емпіричних коефіцієнтів приведення валу до двоопорної моделі валу і впровадженням емпіричних пружних защемлень себе не виправдали [1,2]. В результаті для статичного розрахунку сучасних шпиндельних валів необхідно використовувати модель багатоопорної балки на нелінійно пружних опорах, де розподіл реактивних опорних зусиль залежить від жорсткості опор, жорсткість яких, в свою чергу, через нелінійність, залежить від величини діючих сил. Шлях підвищення якості проектування полягає в підвищенні якості моделювання шляхом впровадження багатопараметричних підшипникових моделей з фізично обґрунтованими нелінійними характеристиками. Безпосередній розгляд конструктивних особливостей багатоопорних шпиндельних валів вимагає застосування як універсальних комп'ютерних методів нелінійного статичного аналізу, так і удосконалених моделей розрахунку жорсткості опор кочення. Достовірний розрахунок жорсткості опор кочення в сукупності з універсальними підходами до вирішення задачі статичного аналізу для багатоопорних шпиндельних валів дозволить ще на етапі проектування оптимізувати конструкцію шпиндельного вузла, визначивши оптимальну кількість опор, їх тип і положення.

Огляд і невирішена частина проблеми. Статичний аналіз шпиндельних валів зазвичай використовує приблизні довідникові значення жорсткості опор - підшипників кочення. Недоліком такого підходу є те, що жорсткість підшипників кочення істотно залежить від діючих на нього сил, величини технологічних зазорів

і попереднього затягування, теплових навантажень, посадок зовнішнього і внутрішнього кілець, що може дати похибку в оцінці жорсткості опори до 50 %.

© В.Л. Хавін, Б.М. Киркач, С.Ю. Погорілов, С.Ю. Шергін, 2023

Використовувані статичні і квазістатичні моделі підшипників засновані на умовах силової статичної рівноваги елементів кочення, що деформуються в радіальному і осьовому напрямках. Останнім часом застосовуються і умови рівноваги у вигляді суми моментів щодо радіальних осей підшипників. Відповідні процедури для кулькових і роликів підшипників є типовими, основна відмінність полягає в методах визначення деформаційних переміщень. Для шарикопідшипників використовується класичне рішення з точковим контактом Герца [3] і еліптичним контактом [4]. Найбільш відомими моделями для розрахунку жорсткості підшипників є моделі з одним і двома ступенями свободи [5-10]. Загальні чисельно-аналітичні рівняння для визначення переміщень і характеристик жорсткості для моделей підшипників з одним і двома ступенями свободи були отримані в роботах [5-7] і розвинуті Де Мюлем з співавторами [11, 12] та ін.

В останні десятиліття деякі дослідники використовували числовий метод скінченних елементів (МСЕ) для вирішення контактних задач всередині підшипника і визначення розподілу зусиль. Бурдон і співавтори [13] замінили кульки спеціальними пружними елементами при моделюванні радіальних шарикопідшипників для чисельного дослідження пружної поведінки підшипників.

У роботі [14] для радіальних шарикопідшипників був запропонований метод, названий модифікованим методом Джонса-Харріса (МЖМ), що дозволяє отримати більш точну чисельно-аналітичну модель.

В останніх квазістатичних чисельно-аналітичних моделях при формуванні умов рівноваги кількість ступенів свободи збільшується з урахуванням просторових механічних зв'язків між конструктивними елементами підшипників, вводяться уточнені моделі розподілу зусиль між елементами кочення, розраховується зміна кутів контакту між тілами кочення і кільцями в процесі деформування, враховується вплив кінематики руху елементів кочення, тертя, змащення і теплових ефектів [15-21].

У даній роботі для радіальних і радіально-упорних шарикопідшипників обґрунтована ефективність підходу, названого в [14] модифікованим методом Джонса-Харріса, що дозволяє отримати більш точну відносно просту чисельно-аналітичну модель розрахунку жорсткості підшипників.

Основна частина. Підходи до оцінки жорсткості підшипників включають аналітичні (напіваналітичні), чисельні, експериментальні та комбіновані методи. Для оцінки жорсткості радіальних і радіально-упорних підшипників було отримано кілька залежностей на основі аналітичних (напіваналітичних) моделей контактної взаємодії елемента кочення з доріжками кочення. В основному ці залежності засновані на ідеалізації геометрії компонентів шарикопідшипника і модельному розподілі зусиль по навантаженим елементам кочення. Залежності досить прості у використанні, але їх недоліки криються в низькій точності результатів за рахунок введених спрощень. В даному випадку інтерес представляє порівняльний аналіз відомих аналітичних і напіваналітичних залежностей з метою вибору найбільш ефективного інженерного підходу для розрахунку радіальної жорсткості шарикопідшипників.

При навантаженні зовнішніми зусиллями пружні кульки, що контактують з кільцями, деформують як внутрішнє, так і зовнішнє кільця. У всіх аналітичних і напіваналітичних моделях для вирішення задачі контакту кульки з доріжками кочення застосовується теорія контакту по Герцу [3] і абсолютна радіальна контактна деформація елемента кочення відповідно до теорії контакту Герца представлена в канонічній формі:

$$Q = K_{\delta} \delta^n, \quad (1)$$

або

$$\delta = K_Q Q^{1/n} \quad (2)$$

де $K_Q = K_{\delta}^{(-1/n)}$ або $K_{\delta} = K_Q^{-n}$.

В залежностях (1), (2) δ – абсолютна радіальна деформація на елементі кочення (відносно зближення між кільцями); Q – величина стискаючої складової радіальної сили, що діє на елемент кочення; K_{δ} , K_Q – характеристики жорсткості контакту – числові константи, що залежать від пружних властивостей матеріалу, умов контакту і геометрії контактних тіл; n – показник ступеня ($n = 1,5$ для контакту кульки з доріжками кочення).

Основною відмінністю моделей є методика розрахунку характеристик жорсткості K_Q і K_{δ} . Визначення характеристик жорсткості здійснюється або шляхом вирішення задачі спільного контакту кульки з двома криволінійними доріжками кочення (в напіваналітичному і чисельному рішеннях); або у вигляді вирішення двох окремих задач контакту кульки з внутрішнім і зовнішнім кільцем і подальшого розрахунку сумарної характеристики жорсткості. В даному випадку маємо:

$$Q_{ij} = K_{ij} \delta_{ij}^n, \quad Q_{ej} = K_{ej} \delta_{ej}^n, \quad (3)$$

де $Q_{ij} = Q_{ej} = Q_j$ – стискаюче зусилля, що діє на j – кульку, δ_{ij} та δ_{ej} – нормальні переміщення в контакті j – кульки з внутрішньою та зовнішньою доріжками кочення відповідно, K_{ij} и K_{ej} – характеристики жорсткості для відповідних контактів.

Результуючі характеристики жорсткості для контакту j – кульки з внутрішньою та зовнішньою доріжками кочення K_Q, K_δ визначаються залежностями:

$$K_{\delta j} = \left(K_{ij}^{-1/n} + K_{oj}^{-1/n}\right)^{-n} \quad K_{Qj} = K_{ij}^{-1/n} + K_{oj}^{-1/n} \quad (4)$$

Рішення задачі контактної взаємодії кульки з кільцями підшипників як задачі контакту з напівнескінченими криволінійними тілами дозволяють визначити залежності [13]:

$$K_{ij} = K_{ej} = K = \frac{\pi k E}{3f} \sqrt{\frac{2\varepsilon R}{f}}$$

ε, f – еліптичні інтеграли першого та другого роду, k -параметр еліптичності, що обчислюється через ε, f . У роботі [22] на основі метода найменших квадратів і лінійної регресії, отримані спрощені приближення:

$$\varepsilon = 1,000 + 0,597 \ln\left(\frac{R_x}{R_y}\right), \quad f = 1,538 + 0,602 \ln\left(\frac{R_x}{R_y}\right), \quad k = 1,034 \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^{0,636} \quad (5)$$

$$E = \frac{2}{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}} - \text{приведений модуль пружності, де } E_1, E_2, \nu_1, \nu_2 - \text{модулі пружності та}$$

коефіцієнти Пуассона кульки та кільця відповідно. Вирази для R_x, R_y, R мають вигляд:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}}, \quad \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}}, \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y},$$

де $R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$ – головні радіуси кривизни контактуючих тіл, кульки (1) та кільця (2) відповідно.

В діапазоні зміни реальних значень для R_x, R_y, R параметр k змінюється в діапазоні $1 \leq k \leq 10$,

при цьому похибки обчислення k, ε, f по наближеним залежностям (5) складають менше 3%.

Важливе місце у визначенні характеристик жорсткості K_Q и K_δ відіграє задача розподілу зовнішнього зусилля між елементами кочення. На розподіл зовнішнього зусилля в основному впливає внутрішня геометрія підшипника. Розподіл зусиль між елементами кочення в зоні навантаження нерівномірний та залежить від ряду факторів, зокрема, від кількості елементів кочення, кута контакту і жорсткості контакту, абсолютної деформації контакту в місці найбільш завантаженого «нульового» елемента кочення, зазорів, частоти обертання і т. ін.

У всіх моделях розподілу зусиль передбачається, що для рівноваги внутрішнього кільця підшипника сума складових сил, що діють на кожен елемент кочення в проекції на напрямок дії зовнішнього зусилля, повинна дорівнювати прикладеному зусиллю. Зусилля, що діють з боку елементів кочення, залежать від контактних деформацій на цих елементах, які, в свою чергу, пов'язані з сумарним переміщенням внутрішнього кільця підшипника і зусиллям, що діє на найбільш навантажений елемент кочення. Ці відносини формулюються або у дискретному вигляді за рахунок скінченного числа навантажених тіл кочення або в неперервній, інтегральній формі, розподіляючи нелінійно жорсткість (зусилля) по довж навантаженої зони шляхом введення інтегрального коефіцієнта розподілу навантаження. У всіх моделях розподілу зусиль можна враховувати зазор в підшипнику і додаткові фактори (швидкість обертання, посадку кільця і т. ін.).

В розглянутих в даній роботі інженерних моделях для розрахунку характеристик радіальної жорсткості підшипника прийнято вважати, що підшипник навантажений з боку внутрішньої обойми постійним

радіальним зовнішнім зусиллям. Зовнішня обойма жорстко фіксується, форма частин підшипника є абсолютно точною або ж враховується зазор в підшипнику.

На основі експериментальних досліджень, шляхом введення емпіричних додаткових гіпотез для спрощення залежностей (5) і використання однієї з моделей розподілу зусиль по елементах кочення, був запропонований ряд інженерних формул для розрахунку характеристик жорсткості радіальних та радіально-упорних шарикопідшипників.

Узагальнення отриманих в роботах [20, 21, 23] відношень дозволяє сформулювати універсальну структуру залежностей, що зв'язують радіальне переміщення внутрішньої обойми сталених радіальних та радіально-упорних підшипників з поточним зовнішнім зусиллям:

$$F_r = K_{\delta_r} \delta_r^n, \quad (6)$$

$$\delta_r = K_{F_r} F_r^{1/n}$$

де F_r – зовнішнє радіальне зусилля, що діє на підшипник, δ_r – радіальне переміщення внутрішнього кільця по відношенню до зовнішнього в напрямку зовнішнього зусилля, K_{F_r}, K_{δ_r} – характеристики радіальної жорсткості підшипника, для яких мають місце узагальнені залежності:

$$K_{F_r} = P_r D^{n_1} Z^{n_2} (\cos \alpha)^{n_3}, \quad K_{\delta_r} = K_{F_r}^{-n} = P_r^{-n} D^{-n_1 n} Z^{-n_2 n} (\cos \alpha)^{-n_3 n} \quad (7)$$

де α – кут контакту в радіально-упорних підшипниках ($\alpha = 0$ для радіальних підшипників).

У таблиці 1 наведені параметри характеристик радіальної жорсткості для відомих класичних залежностей підшипників без зазора.

Таблиця 1 – Параметри характеристик радіальної жорсткості для відомих класичних залежностей підшипників без зазора

Автор	Параметри характеристик жорсткості				
	n	n_1	n_2	n_3	$P_r, \frac{MM}{H^{1/n}}$
Гарджуліо, [8]	1,5	-1/3	-2/3	-5/3	$1,275 \cdot 10^{-3}$
Хуперт, [23]	1,5	-1/3	-2/3	-5/3	$\varepsilon \times 1,81 \cdot 10^{-3}$
Палмгрен-Джонс-Харріс, [5-7]	1,5	-1/3	-2/3	-5/3	$1,27 \cdot 10^{-3}$

де $\varepsilon = \left(\frac{1 + \bar{k}}{\bar{k}} \right)^{0,23}, \frac{H}{MM^n}, \bar{k}$ – коефіцієнт осциляції.

Аналіз даних з таблиці 1 показує значну схожість результатів, отриманих з розглянутих моделей. Найвідомішою і популярною є модель, яка називається моделлю Джонса-Харріса (JHM) [5-7].

Модель Джонса-Харріса (JHM) заснована на гіпотезах:

- для визначення радіальної деформації підшипника слід розглянути деформацію тільки самого навантаженого елемента кочення;

- деформації контактуючих елементів малі і лінійно-пружні, контакт розглядається в рамках теорії Герца без урахування сил інерції, гіроскопічних ефектів і сил тертя.

В рамках представлених гіпотез, заснованих на вирішенні задач пружного контакту напівкінчених криволінійних контактних поверхонь з кулею, метод JHM дозволяє отримати наведені вище нелінійні відносини, що зв'язують зближення контактуючих поверхонь з зусиллям, що діє на підшипник.

Для статичного розподілу зусиль між кульками для зовнішньої радіальної сили в JHM – моделі використовувались залежності, отримані Стрибеком [24] за допомогою інтеграла Сьяволла [25] для сили, що діє на найбільш навантажену кульку без урахування

$$Q_{\max} = \frac{4,37 F_r}{Z \cos \alpha} \quad (8)$$

і з урахуванням технологічного зазору в підшипнику

$$Q_{\max} = \frac{5,0F_r}{Z \cos \alpha}. \quad (9)$$

Внаслідок нелінійної залежності деформації δ_r від зовнішніх зусиль значення жорсткості підшипників кочення для відомого значення зусилля можна отримати як «січну» або «дотичну» жорсткість.

Вираз для «січної» жорсткості визначається залежністю:

$$C_r = F_r / \delta_r, \quad (10)$$

що дозволяє з [5] вивести вираз для «січної» жорсткості за допомогою зовнішнього зусилля:

$$C_r = K_{F_r}^{-1} F_r^{\frac{n-1}{n}}, \quad (11)$$

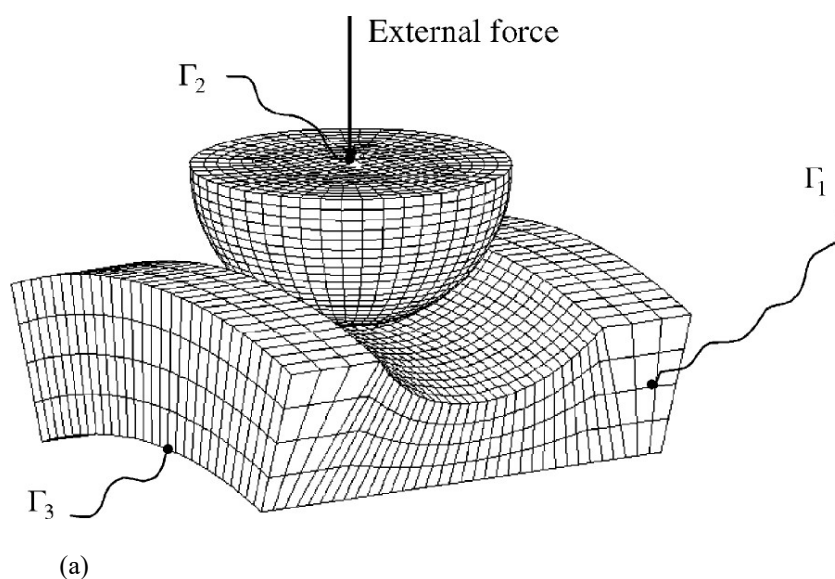
Значення констант для характеристики радіальної жорсткості від залежності (11) наведені в таблиці 1.

Слід зазначити, що для радіально-упорних шарикопідшипників значення початкового кута контакту α дещо змінюється в залежності від величини сили, що діє на підшипник, і визначається спеціальним розрахунком [9]. Вираз для «дотичної» жорсткості визначається похідною і може бути виведено з виразу [5]:

$$C_r^* = dF_r / d\delta_r = n K_{F_r}^{-1} F_r^{\frac{n-1}{n}}, \quad (12)$$

Вирази (11), (12) є узагальненими нелінійними залежностями для «січної» і «дотичної» жорсткості шарикопідшипників кочення.

У роботі [14] пропонується модифікований метод Джонса-Харріса (МЖМ), де, на відміну від моделі Джонса-Харріса, для вирішення задачі контакту для окремої кульки з доріжками кочення використовується не аналітична модель контакту по Герцу, а скінченно-елементні періодичні моделі [14], що складаються з двох півкуль (половина елемента кочення), Γ_2 , що контактують кожна окремо з 1/2-ю частиною внутрішнього та зовнішнього кільця підшипника відповідно, що мають фізично обґрунтовані граничні умови, що впливають з періодичності обраного для розрахунку елемента Γ_1 , вільної бічної поверхні кілець, вільної нижньої і нерухомої верхніх поверхонь кілець Γ_3 (рис. 1).



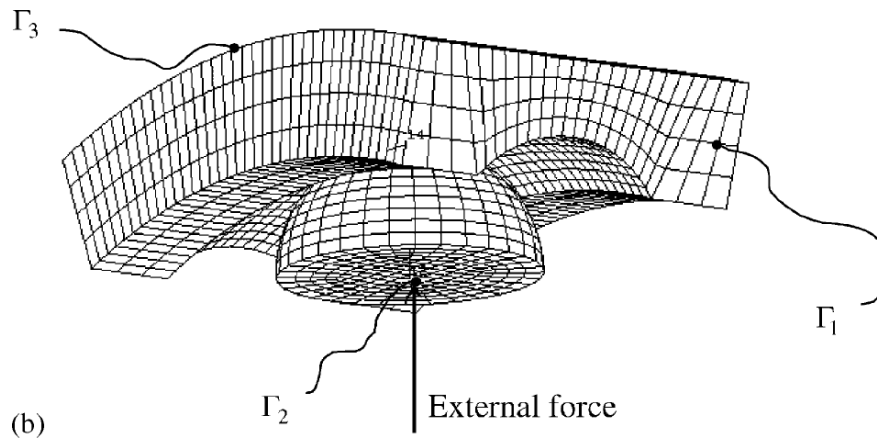


Рис.1 – Моделі скінченних елементів

Для кожної періодичної частини повне переміщення визначається як сума переміщень в контактах півкуль відповідного елемента кочення з зовнішнім і внутрішнім кільцем ($\delta_r = \delta_i + \delta_e$), зв'язок між переміщеннями і зусиллям задається співвідношеннями виду (2):

$$Q_i = K_i^\circ \delta_i^m, \quad Q_e = K_e^\circ \delta_e^m,$$

де m , K_e° , K_i° – показник ступеня і коефіцієнти пропорційності (характеристики жорсткості) для контакту кульки з зовнішнім (e) і внутрішнім (i) кільцем підшипника відповідно; δ_i – абсолютна контактна деформація в контакті кульки з внутрішнім кільцем; δ_e – абсолютна контактна деформація в контакті кульки з зовнішнім кільцем; $Q_i = Q_e$.

Сумарна характеристика жорсткості контакту кульки та кільця K_F° визначається в відповідності з (4):

$$K_F^\circ = (K_i^\circ)^{\frac{1}{m}} + (K_e^\circ)^{\frac{1}{m}}$$

Показник ступеня m і характеристик жорсткості контакту K_e° та K_i° визначаються з числового рішення методом скінченних елементів вище розглянутих контактних задач для кожного конкретного підшипника.

Повне переміщення в підшипнику в напрямку радіальної сили на найбільш навантаженій кульці визначається як результат спільного деформування Z^* елементів кочення, що контактують з кільцями [24].

Скінченно-елементні моделі, що використовуються для визначення характеристик жорсткості в контакті елемент кочення – підшипникові кільця, більш точно відображають фактичну геометрію і жорсткість зовнішньої і внутрішньої доріжок кочення підшипника. Експерименти підтвердили, що результати МЖМ при визначенні переміщень практично узгоджуються з результатами, отриманими при моделюванні підшипника «в цілому» методом скінченних елементів і є точнішими, ніж результати, отримані при ЖМ [14]. Робочий і комп'ютерний час, необхідний при використанні МЖМ, помітно менше, ніж при використанні МСЕ «в лоб» для підшипника в цілому.

У методі МЖМ, як і в моделі ЖМ, зв'язок між радіальною деформацією підшипника δ_r , що визначається на найбільш навантаженій кульці, та зовнішньою радіальною силою F_r подібно (5) задається виразом:

$$\delta_r = K_{Fr}^\circ F_r^{\frac{1}{m}}, \quad (13)$$

де K_{Fr}° – коефіцієнт пропорційності (характеристика жорсткості), що залежить від пружних властивостей матеріалів контактуючих тіл і геометрії контакту (діаметра кульок, діаметрів і кривизни доріжок кочення). У моделі ЖМ коефіцієнт K_{Fr}° відповідає K_{Fr}° МЖМ – моделі.

Рішення задач для лінійки з п'яти стандартних радіальних шарикопідшипників фірми *SKF*, характеристики яких представлені в Табл. 2, дозволило для всіх розглянутих типорозмірів радіальних шарикопідшипників отримати значення $m \approx 1,3$ (в моделі *JHM* $n \approx 1,5$), а також набір характеристик жорсткості K_e° , K_i° та K_F° які, як показали розрахунки, для конкретного підшипника практично не змінюються в широкому діапазоні зовнішніх зусиль [14] і представлені в Табл. 3.

Характеристика жорсткості підшипника K_{Fr}° (7) може бути отримана заданням максимальної сили Q_{\max} на найбільш навантаженій кульці значеннями із залежностей (8) або (9).

Таблиця 2 – Характеристики шарикопідшипників.

Характеристики	Марка підшипника				
	<i>SKF</i> 6201	<i>SKF</i> 6206	<i>SKF</i> 6209	<i>SKF</i> 6214	<i>SKF</i> 6220
Радіус кривизни канавки доріжки кочення, $r_0 = r_i$, мм	3,1	5,3	6,6	6,6	13,2
Діаметр кульки, D , мм	6	9,6	12,7	12	24
Діаметр зовнішньої доріжки кочення d_0 , мм	28	55,6	77,7	102	164
Діаметр внутрішньої доріжки кочення d_i , мм	16	36,4	52,3	78	116
Кількість кульок, Z	7	12	9	18	14

Таблиця 3 Характеристики жорсткості K_F°

Характеристики жорсткості	Марка підшипника				
	<i>SKF</i> 6201	<i>SKF</i> 6206	<i>SKF</i> 6209	<i>SKF</i> 6214	<i>SKF</i> 6220
K_i°	387000	309000	500000	363000	556000
K_e°	387000	318000	511000	379000	572000
K_F°	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,19 \cdot 10^{-4}$	$0,822 \cdot 10^{-4}$	$1,04 \cdot 10^{-4}$	$0,756 \cdot 10^{-4}$

Інший варіант чисельного визначення максимальної сили Q_{\max} та характеристики жорсткості підшипника K_{Fr}° для *MJHM* – моделі з урахуванням спільного деформування z^* навантажених елементів кочення запропонований в роботі [26] шляхом рішення системи з $(z^* + 1)/2$ нелінійних рівнянь, які з урахуванням технологічного зазору в підшипнику Δ мають вигляд:

$$F_r = Q_{\max} + 2 \left(K_F^\circ \right)^{-m} \sum_{j=1}^q \delta_{rj}^m \cos \psi_j, \quad (14)$$

$$Q_{\max}^{\frac{1}{m}} = \left(\delta_{rj} + \frac{\Delta}{2} \right) / \left(K_F^\circ \cos \psi_j \right), \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (15)$$

де $q = (z^* - 1)/2$; $\psi_j = j\gamma$ – кут, що визначає місце j – ої кульки по відношенню до радіальної зовнішньої стискаючої сили F_r , що діє на підшипник; $\gamma = 2\pi/z$ – кутова відстань між сусідніми елементами кочення.

Невідомі δ_{rj} , $j = 1, 2, \dots, q$ і Q_{\max} – результат рішення нелінійної системи рівнянь (14), (15) при заданій силі F_r . Константа m , так само як і характеристика жорсткості контакту K_F° , попередньо визначаються для конкретної марки підшипника чисельно, шляхом вирішення двох відповідних контактних задач методом скінченних елементів (див. рис. 1). Рішення нелінійної системи рівнянь (14), (15) здійснювалися методом Ньютона-Рафсона. При необхідності в рівняннях (14), (15) можуть бути враховані відцентрові сили, що діють на елементи кочення, а також особливості геометрії опорно-упорних шарикопідшипників (контактний кут).

Значення характеристики жорсткості підшипника в цілому K_{Fr}° чисельно визначається через Q_{\max} , отриманого при заданому значенні сили F_r із рішення системи (14), (15):

$$K_{Fr}^\circ = K_F^\circ (Q_{\max} / F_r)^{\frac{1}{m}} \quad (16)$$

З дещо меншою точністю характеристики жорсткості можуть бути вираховані з використанням залежностей (8) або (9). В цьому випадку для радіальних шарикопідшипників ($\cos \alpha = 1$) вираз для K_{Fr}° без технологічного зазору визначатиметься залежністю $K_{Fr}^\circ = 3,106 \times Z^{\frac{1}{m}} K_F^\circ$, з технологічним зазором – $K_{Fr}^\circ = 3,45 \times Z^{\frac{1}{m}} K_F^\circ$.

В таблиці 4, представлені коефіцієнти K_{Fr} і K_{Fr}° для ЛНМ і МЛНМ – моделей, що отримані на основі залежностей (8) та (9). Тут же представлені коефіцієнти K_{Fr}° для МЛНМ – моделі, що отримані згідно з (14) - (16).

Таблиця 4 – Характеристики радіальної жорсткості підшипників

Характеристики жорсткості на основі залежностей (8), (9)	Марка підшипника				
	SKF 6201	SKF 6206	SKF 6209	SKF 6214	SKF 6220
K_{Fr} ЛНМ – модель, без зазору	$1,91 \cdot 10^{-4}$	$1,14 \cdot 10^{-4}$	$1,26 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-4}$	$0,758 \cdot 10^{-4}$
K_{Fr} ЛНМ – модель, технологічний зазор	$2,08 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$	$1,37 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$0,826 \cdot 10^{-4}$
K_{Fr}° МЛНМ – модель, без зазору (залежність (7)) МЛНМ – модель, без зазору (рівняння (14)-(16))	$0,696 \cdot 10^{-4}$	$0,46 \cdot 10^{-4}$	$0,576 \cdot 10^{-4}$	$0,336 \cdot 10^{-4}$	$0,408 \cdot 10^{-4}$
	$0,677 \cdot 10^{-4}$	$0,53 \cdot 10^{-4}$	$0,46 \cdot 10^{-4}$	$0,341 \cdot 10^{-4}$	$0,3 \cdot 10^{-4}$
K_{Fr}° МЛНМ – модель, технологічний зазор	$0,773 \cdot 10^{-4}$	$0,511 \cdot 10^{-4}$	$0,639 \cdot 10^{-4}$	$0,368 \cdot 10^{-4}$	$0,453 \cdot 10^{-4}$

Аналіз представлених результатів показує, що застосування рівнянь (14) – (16) дозволяє в залежності від марки підшипника уточнити залежність Стрібека (7) на 5– 35%.

За аналогією з виразами для «сікучої» і «дотичної» радіальної жорсткості (11) і (12) для ЛНМ – моделі співвідношення для жорсткостей для МЛНМ – моделі приймають вигляд:

- «сікуча» жорсткість:

$$C_r = (K_{Fr}^\circ)^{-1} F_r^{\frac{m-1}{m}} \quad (17)$$

- «дотична» жорсткість:

$$C_r^* = m(K_{Fr}^\circ)^{-1} F_r^{\frac{m-1}{m}} \quad (18)$$

Для оцінки ефективності МЈНМ – моделі проведено порівняння жорсткостей підшипника *SKF* 6201, отриманих за ЈНМ та МЈНМ – моделями, з експериментальними даними з роботи [14] (Рис. 2).

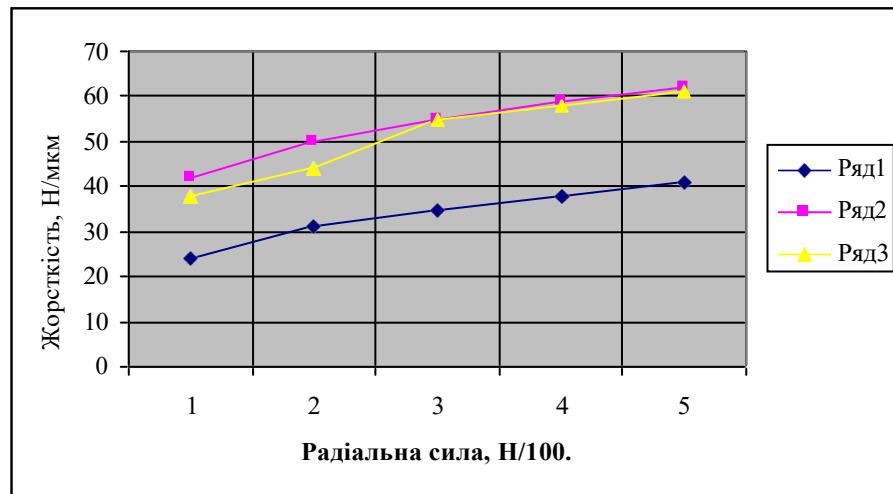


Рис.2 – Радіальна жорсткість підшипника *SKF*. Ряд1–ЈНМ–модель, Ряд2–МЈНМ–модель, Ряд3–експеримент

Результати, що представлені на рис. 3 в діапазоні сил до 500 Н, показують невідповідність з експериментальними даними до 40 – 50% для моделі ЈНМ і 3 – 12% для моделі МЈНМ.

При встановленні значень сили в ньютонх радіальні жорсткості, що розраховані на основі залежностей (11), (12), (17), (18), мають розмірність Н/мм. У таблицях 5 та 6 наведені значення радіальних жорсткостей серії підшипників компанії *SKF*, розрахованих за ЈНМ і МЈНМ – моделями.

Аналіз результатів, представлених в Табл. 5 та 6, показує, що використання моделі МЈНМ дає підвищення точності розрахунку жорсткості для радіальних підшипників в порівнянні з ЈНМ – моделлю на 20 - 40%,

Таблиця 5 – Радіальні «січні» жорсткості підшипників

Радіальна сила F_r , кН	1,0	2,0	2,5
Радіальна «січна» жорсткість C_r Н/мм по МЈНМ – моделі			
<i>SKF</i> 6201	63,4	74,2	78,30
<i>SKF</i> 6206	95,3	112	118
<i>SKF</i> 6209	76,7	89,8	94,7
<i>SKF</i> 6214	133	156	164
<i>SKF</i> 6220	108	127	134
Радіальна «січна» жорсткість C_r Н/мм по ЈНМ – моделі			
<i>SKF</i> 6201	48	60,6	64,9
<i>SKF</i> 6206	80,5	102	109
<i>SKF</i> 6209	72,8	92	98,5
<i>SKF</i> 6214	71,3	90	96,4
<i>SKF</i> 6220	121	152	163

Таблиця 6 – Радіальні «дотичні» жорсткості підшипників

Радіальна сила F_r , кН	1,0	2,0	2,5
Радіальна «дотична» жорсткість C_r Н/мм по МНМ – моделі			
SKF 6201	82,4	96,5	102
SKF 6206	124	146	153
SKF 6209	99,7	117	123
SKF 6214	173	203	213
SKF 6220	140	165	174
Радіальна «дотична» жорсткість C_r Н/мм по ЖМ – моделі			
SKF 6201	72	90,9	97,4
SKF 6206	121	153	164
SKF 6209	109	138	148
SKF 6214	107	135	145
SKF 6220	182	228	244

Застосування моделі МНМ дає можливість при незначних обчислювальних трудовитратах отримати сімейство кривих для підшипника, що характеризують залежність його радіальної жорсткості від зовнішнього зусилля і швидкості обертання, що забезпечить інженерний розрахунок жорсткостей з досить високим ступенем точності. Як приклад на рисунку 3 представлена залежність «січної» жорсткості підшипника SKF 6201 від швидкості обертання при радіальній силі 2000 Н.

Оскільки показник ступеня m і коефіцієнти K_{Fr}° практично не змінюються в широкому діапазоні змін зовнішніх зусиль, їх можна з успіхом використовувати для практичних розрахунків жорсткості різних радіальних та радіально-упорних шарикопідшипників, конструктивно-технологічні характеристики яких відповідають характеристикам фірми SKF розглянутих в роботі.



Рис.3 – Залежність жорсткості підшипника SKF 6201 від швидкості обертання

Слід зазначити, що ЖМ і МНМ – моделі розрахунку жорсткості це моделі з двома незалежними ступенями свободи для переміщень в радіальному і осьовому напрямках конструкції підшипника. МНМ – модель уточнює тільки радіальну жорсткість радіальних (радіально-упорних) підшипників, зв'язок з осьовою жорсткістю не розглядається.

В останніх квазістатичних чисельно-аналітичних моделях при формуванні умов рівноваги збільшується кількість ступенів свободи моделей. З урахуванням просторових механічних зв'язків між конструктивними елементами вводяться уточнені моделі розподілу зусиль між елементами кочення, розраховується зміна кутів контакту між тілами кочення і кільцями підшипника в процесі деформування, враховується вплив кінематики руху елементів кочення, тертя, змащення і теплових ефектів. Розвиток моделей для опису нелінійних жорсткостей підшипників кочення в даний час спрямований на розробку пов'язаних матриць жорсткості 5-го порядку і вимагає окремого спеціалізованого аналізу.

Висновки. У роботі представлений аналіз модифікованого методу Джонса-Харріса (МЖМ), який забезпечує підвищення точності за рахунок уточнення констант в залежностях для радіальних жорсткостей радіальних та радіально-упорних шарикопідшипників.

Моделі скінченних елементів, що використовуються для визначення залежності переміщень від радіального зусилля в контакті «елемент кочення – кільця підшипників» в МЖМ – моделі замість моделі контакту по Герцу в моделі Джонса-Харріса (ЖМ), більш точно відображають геометрію і жорсткість зовнішньої і внутрішньої доріжок кочення підшипника, що дозволяє отримати значно точніші константи для моделі нелінійної жорсткості, що підтверджується порівнянням з експериментом.

Перевагою МЖМ – моделі є можливість автоматичного врахування технологічного зазору і швидкості обертання валу (відцентрової сили, що діє на кульку), що вимагає окремого спеціального рішення для ЖМ – моделі.

Отримані результати розрахунку жорсткості для ряду підшипників фірми SKF можуть бути успішно використані для практичних розрахунків жорсткості радіальних та радіально-упорних шарикопідшипників інших фірм, конструктивно-технологічні характеристики яких відповідають характеристикам фірми SK, розглянутим в цій роботі.

Трудовитрати і комп'ютерний час, необхідний для реалізації модифікованого методу Джонса-Харріса, помітно менше, ніж при використанні методу скінченних елементів для визначення жорсткості «в лоб» для кожного окремого підшипника, що робить МЖМ – модель ефективною інженерною моделлю розрахунку жорсткості шарикопідшипників.

Список літератури

1. Зверев И.А., Самохвалов Е.И., Левина З.М. Автоматизированные расчеты шпиндельных узлов Станки и инструмент. 1984. №2.с.11-15.
2. Хомяков В.С., Кочинев Н.А., Сабиров Ф.С. Исследование динамических характеристик шпиндельных узлов. Вестник МГТУ «Станкин». 2008. №4. с. 15-22.
3. Hertz H. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.*, 1881, vol. 92, pp. 156–171.
4. Timoshenko G. Theory of elasticity. McGraw-Hill, 1970. 608 p.
5. Jones, A. B. (1960), “A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings,” *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, **82**, pp 309-320.
6. Palmgren A. Ball and Roller Bearing Engineering. SKF Industries Inc., Philadelphia, 1959.
7. Harris, T. A. (1966), *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley.
8. Gargiulo, E.P., Jr., A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness, *Machine Design*, 1980, pp.107-110
9. Kovalev M.P., Narodetskiy M.Z. Raschet vysokotochnykh sharikopodshipnikov [Calculation of high-precision ball bearings]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 280 p 11.
10. Perel' L.Ya., Filatov A.A. Podshipniki kacheniya: raschet, proektirovanie i obsluzhivanie opor [Ball bearings: calculation, engineering and supports maintainance]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 608.
11. De Mul J., Vree J., Maas D. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part I: General theory and application to ball bearings // *Journal of Tribology*. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 142–148.
12. De Mul J.M., Vre J.M.e, Maas D.A. Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part II: Application to roller bearings and experimental verification // *Journal of Tribology*. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 149–155.
13. A. Bourdon, J. Rigal and D. Play, “Static Rolling Bearing Models in a C.A.D. Environment for the Study of Complex Mechanisms: Part II—Complete Assembly Model,” *Journal of Tribology*, Vol. 121, No. 2, 1999, pp. 215-223. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2833924>
14. Yuan Kanga, Ping-Chen Shen, Chih-Ching Huangc, Shyh-Shyong Shyr, Yeon-Pun Chang “A Modification of the Jones- Harris Method for Deep-Groove Ball Bearings,” *Tribology International*, Vol. 39, No. 11, 2006, pp. 1413-1420. <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2005.12.005>.
15. Adams G.G., Nosonovsky M. Contact modelling—forces // *Tribol. Int.* 2000. Vol. 33. No. 5-6. P. 431–442. DOI: 10.1016/S0301-679X(00)00063-3
16. Hernot X., Sarto M., Guillot J. Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach // *ASME J. Mech. Des.* 2000. Vol. 122. No. 1. P. 83–80. DOI: 10.1115/1.533548
17. Kurvinen E., Sapanen J., Mikkola A. Ball bearing model performance on various sized rotors with and without centrifugal and gyroscopic forces // *Mech. Mach. Theory*. 2015. Vol. 90. P. 240–260. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.03.017
18. Holkup T., Holy S. Complex modelling of spindle rolling bearings // *Journal of Machine Engineering*. 2006. Vol. 6. No. 3. P. 48–61.
19. Study on the influence of thermal characteristics of rolling bearings and spindle resulted in condition of improper assembly / X. Li, Yi. Lu, K. Yan, J. Liu, J. Hong // *Applied Thermal Engineering*. 2017. Vol. 114. P. 221–233. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2016.11.194.
20. Henghai Zhang ,1,2 Wenku Shi ,1 Guozheng Liu,1,3 and Zhiyong Chen A Method to Solve the Stiffness of Double-Row Tapered Roller Bearing
21. Rijnberg, J. L. (2007). Theoretical modeling of the stiffness of angular contact ball bearings using a two DOF and a five DOF approach. (DCT rapporten; Vol. 2007.129). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven
22. Brewe, D. and Hamrock, B., Simplified solution for elliptical-contact deformation between two elastic solids, *ASME Trans. J. Lub. Tech.*, 101(2), 231–239, 1977
23. Houper, L. 1997. A Uniform Analytical Approach for Ball and Roller Bearing Calculations. *Journal of Tribology*, Vol. 119, pp. 851–858.
24. R. Stribeck, “Ball Bearings for Various Loads,” *Transactions of the ASME*, Vol. 29, 1907, pp. 420-463.
25. H. Sjoval, “The Load Distribution within Ball and Roller Bearings under Given External Radial and Axial Load,” *TekniskTidskrift, Mek.*, h.9, 1933.
26. A new approach for the load calculation of the most loaded rolling element for the rolling bearing with internal radial clearance - The case study Radoslav Tomović Original Article : March 19th, 2020 DOI: <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-17922/v1>

Bibliography (transliterated):

1. Zverev.I.A., Samokhvalov E.I., Levina Z.M. Avtomatizirovannye raschety shpindelnykh uzlov. Stanki I instrymnt. 1984. №2. s.11-15.
2. Khomjakov V.S., Kochinev N.A., Sabirov F.S. Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik shpindelnykh uzlov Vestnik MGTU «Stankin». 2008. №4. s. 15-22.
3. Hertz H. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.*, 1881, vol. 92, pp. 156–171.
4. Timoshenko G. Theory of elasticity. McGraw-Hill, 1970. 608 p.

5. Jones, A. B. (1960), "A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings," *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, **82**, pp 309-320.
6. Palmgren A. Ball and Roller Bearing Engineering. SKF Industries Inc., Philadelphia, 1959.
7. Harris, T. A. (1966), *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley.
8. Gargiulo, E.P., Jr., A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness, Machine Design, 1980, pp.107-110
9. Kovalev M.P., Narodetskiy M.Z. Raschet vysokotochnykh шарикоподшипников [Calculation of high-precision ball bearings]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 280 p 11.
10. Perel' L.Ya., Filatov A.A. Podshipniki kacheniya: raschet, proektirovanie i obsluzhivanie opor [Ball bearings: calculation, engineering and supports maintenance]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992. 608.
11. *De Mul J., Vree J., Maas D.* Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part I: General theory and application to ball bearings // *Journal of Tribology*. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 142–148.
12. *De Mul J.M., Vre J.M.e, Maas D.A.* Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction. Part II: Application to roller bearings and experimental verification // *Journal of Tribology*. 1989. Vol. 111. No. 1. P. 149–155.
13. A. Bourdon, J. Rigal and D. Play, "Static Rolling Bearing Models in a C.A.D. Environment for the Study of Complex Mechanisms: Part II—Complete Assembly Model," *Journal of Tribology*, Vol. 121, No. 2, 1999, pp. 215-223. <http://dx.doi.org/10.1115/1.2833924>
- 14 Yuan Kanga, , Ping-Chen Shen, Chih-Ching Huangc, Shyh-Shyong Shyr, Yeon-Pun Chang "A Modification of the Jones- Harris Method for Deep-Groove Ball Bearings," *Tribology International*, Vol. 39, No. 11, 2006, pp. 1413-1420. <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2005.12.005>.
15. Adams G.G., Nosonovsky M. Contact modelling—forces // *Tribol. Int.* 2000. Vol. 33. No. 5-6. P. 431–442. DOI: 10.1016/S0301-679X(00)00063-3
16. *Hernot X., Sarto M., Guillot J.* Calculation of the stiffness matrix of angular contact ball bearings by using the analytical approach // *ASME J. Mech. Des.* 2000. Vol. 122. No. 1. P. 83–80. DOI: 10.1115/1.533548
17. *Kurvinen E., Sopanen J., Mikkola A.* Ball bearing model performance on various sized rotors with and without centrifugal and gyroscopic forces // *Mech. Mach. Theory*. 2015. Vol. 90. P. 240–260. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2015.03.017
18. *Holkup T., Holy S.* Complex modelling of spindle rolling bearings // *Journal of Machine Engineering*. 2006. Vol. 6. No. 3. P. 48–61.
19. Study on the influence of thermal characteristics of rolling bearings and spindle resulted in condition of improper assembly / X. Li, Yi Lu, K. Yan, J. Liu, J. Hong // *Applied Thermal Engineering*. 2017. Vol. 114. P. 221–233. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2016.11.194.
20. Henghai Zhang ,1,2 Wenku Shi ,1 Guozheng Liu,1,3 and Zhiyong Chen A Method to Solve the Stiffness of Double-Row Tapered Roller Bearing
21. Rijnberg, J. L. (2007). Theoretical modeling of the stiffness of angular contact ball bearings using a two DOF and a five DOF approach. (DCT rapporten; Vol. 2007.129). Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven
22. Brewe, D. and Hamrock, B., Simplified solution for elliptical-contact deformation between two elastic solids, *ASME Trans. J. Lub. Tech.*, 101(2), 231–239, 1977
23. Houpert, L. 1997. A Uniform Analytical Approach for Ball and Roller Bearing Calculations. *Journal of Tribology*, Vol. 119, pp. 851–858.
24. R. Stribeck, "Ball Bearings for Various Loads," *Transactions of the ASME*, Vol. 29, 1907, pp. 420-463.
25. H. Sjøvall, "The Load Distribution within Ball and Roller Bearings under Given External Radial and Axial Load," *TekniskTidskrift, Mek.*, h.9, 1933.
26. A new approach for the load calculation of the most loaded rolling element for the rolling bearing with internal radial clearance - The case study Radoslav Tomović Original Article : March 19th, 2020 DOI: <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-17922/v1>

Поступила (received) 22.02. 2023

Відомості про авторів / About the Authors

Хавін Валерій Львович (Havin Valerij) – кандидат технічних наук, професор кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-78; e-mail: Valerij.Havin@khp.edu.ua, ORCID: 0000-0002-4827-6474.

Киркач Борис Миколайович (Kyrkach Borys) – кандидат технічних наук, професор кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-62-33; e-mail: Borys.Kyrkach@khp.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4594-557X.

Позорілов Сергій Юрійович (Pogorilov Sergij) – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-78; e-mail: pogorilovsy@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4386-2631.

Шергін Сергій Юрійович (Sherhin Sergij) – старший викладач кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-78; e-mail: Serhii.Sherhin@khp.edu.ua, ORCID: 0009-0000-3449-2064.