

*ХАВІН В.Л., КИРКАЧ Б.М., ШЕРГІН С.Ю.*

## **ВДОСКОНАЛЕНА ІНЖЕНЕРНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ РАДІАЛЬНОЇ ЖОРСТКОСТІ РОЛИКОВИХ ПІДШИПНИКІВ**

В роботі представлений аналіз квазістатичних моделей та обґрунтовано вибір найбільш ефективної інженерної моделі для розрахунку радіальної жорсткості роликових підшипників. Проведено аналіз квазістатичних моделей розрахунку жорсткості роликових підшипників, який полягає в чисельно-аналітичному моделюванні співвідношень сила-переміщення в умовах контактної взаємодії. Відзначено, що для роликових підшипників частіше використовуються напівемпіричні залежності, що запропоновані Палмгреном, Джонсом і Харрісом. Для всіх чисельно-аналітичних квазістатичних моделей роликових підшипників введена узагальнююча залежність зв'язку між силою і переміщенням при контакті в рамках теорії контакту по Герцу, де характеристики жорсткості визначаються рішенням відповідної контактної задачі. Наведено числові значення констант, які отримані декількома авторами на основі емпіричних підходів або приблизного рішення контактної задачі по Герцу для сталевих підшипників. У даній роботі представлений аналіз квазістатичних моделей розрахунку жорсткості і обґрунтовано формування найбільш ефективної інженерної моделі для розрахунку констант радіальної жорсткості роликових підшипників. Для рішення контактної задачі окремого елемента кочення і доріжок кочення використана скінченноелементна періодична модель, що складається з двох половинок елемента кочення, які контактують окремо з частиною внутрішнього і зовнішнього кільця підшипника відповідно та мають фізично обґрунтовані граничні умови. Трудовитрати і комп'ютерний час, необхідний для реалізації запропонованого підходу, менше, ніж при використанні методу кінцевих елементів для визначення жорсткості «в лоб» для кожного окремого підшипника, що робить цю модель ефективною інженерною моделлю розрахунку жорсткості роликових підшипників.

**Ключові слова:** квазістатичні моделі роликових підшипників, ефективна чисельно-аналітична модель розрахунку констант радіальної жорсткості

**KHAVIN V., KYRKACH B., SHERHIN S**

### **AN IMPROVED ENGINEERING MODEL FOR CALCULATING THE RADIAL STIFFNESS OF ROLLER BEARINGS**

The paper presents an analysis of quasi-static models for calculating stiffness and substantiates the choice of the most effective engineering model for calculating the radial stiffness of roller bearings. The analysis of quasi-static models for calculating the stiffness of roller bearings is carried out, which consists in numerical-analytical modeling of force-displacement ratios under conditions of contact interaction. It is noted that for roller bearings, semi-empirical dependencies proposed by Palmgren, Jones and Harris are more often used. For all numerical-analytical quasistatic models of roller bearings, a generalizing relationship between force and displacement at contact is introduced within the framework of the Hertz contact theory, where the stiffness characteristics are determined by the solution of the corresponding contact problem. The numerical values of constants obtained by several authors on the basis of empirical approaches or an approximate solution of the contact Hertz problem for steel bearings are given. In this paper, an analysis of quasi-static models for calculating stiffness is presented and the choice of the most effective engineering model for calculating the radial stiffness constants of roller bearings is substantiated. To solve the contact problem of a separate rolling element and rolling tracks, a finite element periodic model consisting of two halves of the rolling element is used, which are in contact separately with part of the inner and outer bearing rings, respectively, and have physically justified boundary conditions. The labor and computer time required to implement the proposed approach is less than when using the finite element method to determine the stiffness "in the forehead" for each individual bearing, which makes this model an effective engineering model for calculating the stiffness of roller bearings.

**Keywords:** quasi-static models of roller bearings, effective numerical-analytical model for calculating radial stiffness constants

**Вступ.** Підшипник кочення - це механічна конструкція, що складається з набору елементів кочення, розташованих в сепараторах між нерухомим і обертовим кільцями – обоймами. Взаємодія між кожним з цих підшипникових елементів здається досить простим, але через взаємозв'язок між елементами і процесами робить моделювання поведінки підшипника кочення складним завданням.

У зв'язку з труднощами розробки досить коректних моделей розрахунку, створення нової конструкції підшипника кочення часто здійснюється на основі експериментальних досліджень, де створений підшипник багаторазово випробовується в умовах експлуатації. Оскільки кількість конструктивних і експлуатаційних параметрів часто досить велике, процес проектування стає трудомістким і дорогим. Такі труднощі призвели до необхідності розробки аналітичних і чисельно-аналітичних моделей, де характеристики підшипника моделюються параметрично, як функції геометрії конструкції і експлуатаційних параметрів підшипників, що скорочує експериментальні роботи.

Існує три типи рівнянь, які моделюють поведінку підшипника:

- рівняння рівноваги, на основі яких формуються моделі статичного (квазістатичного) аналізу підшипників;
- рівняння визначення власних значень, де для знаходження значень критичного параметра використовуються умови рівноваги;
- динамічні рівняння, де до зовнішніх сил і моментів додаються інерційні сили і моменти.

Для підшипників кочення моделі першого типу (квазістатичні моделі) використовуються для оцінки розподілу навантаження на елементи кочення, контактних напружень і деформацій, жорсткості підшипників і втомної довговічності. Квазістатичні моделі можуть враховувати відцентрові сили, швидкості обертання елементів кочення, прослизання і змащування, технологічні зазори і посадки.

**Огляд і невирішена частина проблеми.** Основною відмінністю квазістатичних моделей є чисельно - аналітичне моделювання співвідношень сила-переміщення в умовах контактної взаємодії. Для шарикопідшипників це класичне рішення з еліптичним контактом по Герцу, в той час як для роликових підшипників частіше використовуються напівемпіричні залежності, запропоновані Пальмгреном, Джонсом і Харрісом [1-3]. Необхідна ще й оцінка крутильної та продольної жорсткостей системи інструмент – шпіндельний вузол.

Джонс [2] запропонував найбільш часто використовувану гіпотезу, яка стверджує, що кутова швидкість тіла кочення навколо осі, нормальної до площини контакту, дорівнює нулю на доріжці кочення, що забезпечує більший момент тертя, і відповідна доріжка кочення є керуючою.

В рамках цих моделей також вводиться таке кінематичне обмеження: відносне прослизання між тілом кочення і взаємодіючою доріжкою дорівнює нулю в точці зони контакту.

В останні десятиліття використовується гіпотеза, що є альтернативною гіпотезі Джонса, яка полягає в забезпеченні мінімуму енергії тертя, що розсіюється в контактах кочення при наявності прослизання [4].

Однією з основних моделей при пректуванні роликів підшипників є модель розрахунку їх жорсткості. Перші роботи з розрахунку жорсткості роликів підшипників кочення були виконані Палмгеном [1], Джонсом [2] та Харрісом [3]. Надалі Де-Мюль та ін. [5, 6] на основі моделі Джонса [2] чисельно-аналітично сформулювали матриці пов'язаної жорсткості роликів підшипників. Тонг і Хонг [7, 8] на основі теорії Де-Мюля та ін. [5, 6] розробили змінну в часі матрицю жорсткості кінцевого роликів підшипника. На основі контакту відповідно до теорії Герца, Лім та ін. [9, 10] отримали матрицю жорсткості роликів підшипника з 5 ступенями свободи. Гуо та Паркер [11] розробили скінченноелементну модель на основі контактної механіки і отримали жорсткість для різних типів роликів підшипників.

У цій роботі представлений аналіз квазістатичних моделей розрахунку жорсткості і обґрунтовано формування найбільш ефективної інженерної моделі для розрахунку радіальної жорсткості роликів підшипників

**Основна частина.** Складність визначення жорсткості підшипника полягає в необхідності коректного і відносно простого опису пов'язаної контактної взаємодії між роликом і кільцями підшипника. Теорія пружного контакту Герца разом з інтегралом С'явола [12] для оцінки розподілу зусиль по елементами кочення є основою для класичного прогнозування жорсткості підшипників кочення.

Умови контакту між роликами і доріжками кочення підшипникових кілець є важливим аспектом для визначення жорсткості підшипників. Вважається, що ролик і доріжка кочення від самого початку стикаються уздовж лінії. Відомо, що при контакті двох циліндричних тіл з паралельними осями, що стикаються уздовж лінії, утворюється порівняно невелика площа контакту. Найбільш часто використовуване приближення для визначення розподілу напружень і ширини області контакту засноване на теорії контакту Герца. У зв'язку з різкою зміною геометрії (кривизни) контактуючих тіл, розраховану в рамках класичної теорії Герца, ширину контакту слід розглядати лише як добре приближення до реального контакту.

Основні гіпотези моделей, розглянутих в даній роботі в рамках теорії Герца, наступні:

- кільця не згинаються, а піддаються тільки локальній контактній деформації;
- похибки форми доріжок кочення і роликів невеликі і не враховуються;
- не враховується сила тертя в доріжці кочення;
- відсутні осьові похибки виготовлення роликів;
- деформації лінійно-пружні;
- контактні зусилля між роликами і сепаратором зневажаються малі.

Для всіх чисельно-аналітичних квазістатичних моделей роликів підшипників узагальнююча залежність між силою і переміщенням в контакті в рамках теорії контакту по Герцу представляється у вигляді:

$$Q = K\delta^m, \quad (1)$$

де  $Q$  — нормальне зусилля, що діє на ролик,  $K$  — характеристика жорсткості,  $\delta$  — нормальне переміщення,  $m$  — показник нелінійності (в класичних моделях  $m \approx 1,1$  для роликів підшипників).

Контактне зусилля  $Q_n$  (обумовлене рівновагою) однаково для внутрішнього ( $Q_i$ ) і зовнішнього ( $Q_e$ ) кілець:

$$Q_i = Q_e = Q_n \quad (2)$$

Повне радіальне контактне переміщення внутрішнього кільця по відношенню до зовнішнього кільця в нормальному напрямку відносно доріжок кочення визначається співвідношенням:

$$\delta_n = \delta_i + \delta_e \quad (3)$$

де  $\delta_i$  і  $\delta_e$  контактні деформації в контакті елемента кочення з внутрішнім і зовнішнім кільцями відповідно. Для кінцевого ролика деформація контакту між внутрішнім кільцем і роликом проектується в напрямку контактної деформації (контактного зусилля) зовнішнього кільця підшипника. Проекція дорівнює  $\delta_i \cos \beta$ , а повне відносне переміщення внутрішнього і зовнішнього кілець підшипника в напрямку зусилля  $Q_e$  становить:

$$\delta_n = \delta_e + \delta_i \cos \beta \quad (4)$$

де  $\beta$  — кут конусності ролика.

Згідно (2) - (4) для окремого ролика, що стикається з внутрішнім і зовнішнім кільцями, маємо:

$$Q_n = K_n \delta_n^m \quad (5)$$

де результуюча характеристика жорсткості визначається залежністю:

$$K_n = \left[ \frac{1}{(1/K_i)^{1/\delta} + (1/K_e)^{1/\delta}} \right]^m \quad (6)$$

У цьому виразі  $K_i$  і  $K_e$  - характеристики жорсткості контакту елемента кочення з внутрішнім і зовнішнім кільцем підшипника відповідно. Характеристики жорсткості залежать від матеріалу ролика і кільця, довжини  $l$  і діаметра ролика  $D$ , конфігурації доріжок кочення, наявності тертя і мастила і т.ін. Характеристики жорсткості визначаються шляхом рішення відповідної контактної задачі. Спосіб формування характеристик жорсткості в залежності (4) і розрізняє чисельно-аналітичні моделі і визначає рівень їх коректності.

На основі залежностей (1) - (6) сформовані моделі розрахунку жорсткості циліндричних і конічних роликів підшипників. Пружне контактне деформування між роликом і внутрішнім та зовнішнім кільцями інтерпретується як дві послідовні пружини [16]. Оскільки кут конусності конічного валика невеликий, для зручності розрахунку його прийнято розглядати як циліндричний ролик діаметром  $D^*$ , рівним середньому діаметру конічного валика.

Співвідношення (5) дозволяє сформулювати узагальнений вираз для розрахунку повного радіального переміщення в контакті ролика з кільцями:

$$\delta_r = K_n^\circ Q_n^{\frac{1}{m}} \quad (7)$$

$$K_n^\circ = P_r l^{m_1} D^{m_2} \quad (8)$$

Числові значення констант в залежності (8), отримані на основі емпіричних підходів або приблизного рішення контактної задачі для сталевих підшипників, були запропоновані декількома авторами (табл. 1):

Таблиця 1. Значення констант

Автор	$P_r$	$m_1$	$m_2$	$m$
Палмгрен, Харріс [1,3]	$7,68 \cdot 10^{-5}$	-0,8	0	1,1
Брандлейн та ін. [13]	$9,48 \cdot 10^{-5}$	-0,85	0	1,1
Хуперт [14]	$15,8 \cdot 10^{-5}$	-0,89	-0,093	1,1
Ло Цзивей і Тайнуй [15]	$4,83 \cdot 10^{-5} \left[ (1+k_i)^{0,1} + (1-k_e)^{0,1} \right]$	-0,74	-0,1	1,1

У таблиці 1  $k_i = D/D_i$ ,  $k_e = -D/D_e$  — для контакту ролика з внутрішнім і зовнішнім кільцем відповідно,  $D_i$ ,  $D_e$  — діаметри внутрішньої і зовнішньої доріжок кочення відповідно. Залежність для  $P_r$  (табл. 1) в [15] поширена на підшипники з конічними роликами і має вигляд:  $P_r = 4,83 \cdot 10^{-5} \left[ (1+k_i)^{0,1} \cos \beta + (1-k_e)^{0,1} \right]$ .

В [17] для радіальних і радіально-упорних шарикопідшипників з  $z$  елементами кочення розглядається модифікований метод Джонса-Харріса (МЖМ), де, на відміну від класичної моделі Джонса-Харріса (ЖМ), для вирішення контактної задачі окремого елемента кочення і доріжок кочення використовується не числово-аналітична модель контакту по Герцу, а скінченноелементна періодична модель, що складається з двох півсфер (половини елемента кочення), що контактують окремо з 1/2-ою частиною внутрішнього і зовнішнього кільця підшипника відповідно, мають фізично обґрунтовані граничні умови [18]. У даній роботі для більш коректного визначення характеристики жорсткості  $K_n^\circ$  для контакту окремого елемента кочення і доріжок кочення використовується запропонована в [19] скінченноелементна модель, що складається з періодичної симетричної частини, яка включає половину елемента кочення (напівциліндр), що контактує з відповідними частинами внутрішнього і зовнішнього кільця підшипника (рис. 1). Граничні умови задавалися з умов свободи бічних поверхонь, фіксації нижньої поверхні зовнішнього кільця і навантаження верхньої поверхні внутрішнього кільця стискаючою силою  $Q_n$ . Розраховувалося зближення нижньої поверхні зовнішнього кільця та верхньої поверхні внутрішнього кільця  $\delta_a$ .

Значення радіальної жорсткості для контакту окремого елемента кочення з доріжками (рис. 1) в роботі [19] визначалося залежністю:

$$k_a = Q_n / \delta_a, \quad (9)$$

Співвідношення (7) і (9) дозволяють записати вираз для визначення коефіцієнта жорсткості  $K_n^\circ$ :

$$K_n^\circ = Q_n^{\frac{m-1}{m}} / k_a \quad (10)$$

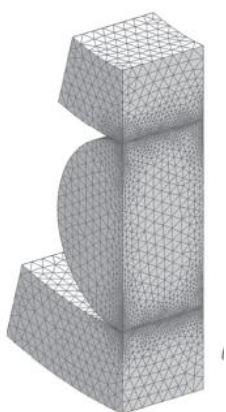


Рис.1 – Скінченноелементна модель

Значення  $K_n^\circ$  для роликів підшипника було визначено з роботи [19], характеристики якого наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Характеристики підшипника

Характеристика	Зовнішній діаметр зовнішнього кільця $D_e$ , мм	Внутрішній діаметр зовнішнього кільця $D_i$ , мм	Зовнішній діаметр внутрішнього кільця $d_e$ , мм	Внутрішній діаметр внутрішнього кільця $d_i$ , мм	Довжина ролика $l$ , мм	Діаметр ролика $D$ , мм	Кількість роликів $z$ , шт
Чисельне значення	35	30,3	19,3	15	6	5,5	11

У таблиці 3 представлені результати розрахунку характеристики жорсткості  $K_n^\circ$  (10) за даними роботи [19] ( $m = 1,1$ ).

Таблиця 3. Коефіцієнт жорсткості  $K_n^\circ$

Параметр	Стискаюче зусилля $Q_n$ , Н	Середня радіальна жорсткість $k_a$ Н/мм	Коефіцієнт жорсткості, $Q_n^{\frac{m-1}{m}} / k_a$ , мм/і <sup><math>\frac{1}{m}</math></sup>	Середня характеристика жорсткості, $K_n^\circ$ , мм/і <sup><math>\frac{1}{m}</math></sup>
Чисельне значення	37	80972	1,39	1,65 $10^{-5}$
	3706	131626	2,11	

Для статичного розподілу зусиль між елементами кочення для зовнішньої радіальної сили в ЖМ – моделі можуть бути використані залежності, отримані Стрібеком [20] за допомогою інтеграла С'яволла [12] для сили, що діє на найбільш навантажену кульку підшипника:

$$Q_{max} = \lambda F_r, \quad (11)$$

де  $\lambda = 4,37/z$  та  $\lambda = 5,0/z$  для підшипника без технологічного зазору в підшипнику і за наявності зазору відповідно;  $z$  – кількість роликів в підшипнику,  $F_r$  – зовнішнє радіальне зусилля.

Радіальна жорсткість підшипника найчастіше визначається через деформацію найбільш навантаженого ролика відповідною максимальною силою  $Q_{max}$ , що визначається в залежності (11).

Інший варіант більш коректного чисельного визначення максимальної сили  $Q_{max}$  з урахуванням спільного деформування  $z^*$  навантажених елементів кочення розглядається, зокрема, в роботі [21] шляхом вирішення системи  $(z^* + 1)/2$  нелінійних рівнянь, які з урахуванням технологічного зазору  $\Delta$  в підшипнику мають вигляд:

$$F_r = Q_{\max} + 2(K_n^\circ)^{-m} \sum_{j=1}^q \delta_{nj}^m \cos \psi_j, \quad (12)$$

$$Q_{\max}^{\frac{1}{m}} = (\delta_{nj} + \frac{\Delta}{2}) / (K_n^\circ \cos \psi_j), \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (13)$$

де  $q = (z^* - 1) / 2$ ;  $\psi_j = j\gamma$  – кут, що визначає положення  $j$ -го ролика по відношенню до радіальної зовнішньої стискаючої сили  $F_r$ , що діє на підшипник;  $\gamma = 2\pi / z$  – кутова відстань між сусідніми елементами кочення. При необхідності в залежностях (12), (13) можна враховувати вплив швидкості обертання (відцентрових сил).

Невідомі  $\delta_{nj}$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$  і  $Q_{\max}$  – є результатом розв'язання нелінійної системи рівнянь (12), (13) при заданій силі  $F_r$ . Константа  $m$ , а також характеристика жорсткості контакту  $K_n^\circ$ , попередньо визначаються для конкретної марки підшипника чисельно, шляхом вирішення відповідної контактної задачі методом скінченних елементів (див. рис.1) і залежностей (9), (10). Рішення нелінійної системи рівнянь (12) і (13) здійснюється методом Ньютона-Рафсона. При відсутності зазору  $\Delta$  система (12), (13) має аналітичне рішення:

$$Q_{\max} = \lambda F_r \quad (14)$$

$$\lambda = (1 + 2 \sum_{j=1}^q (\cos \psi_j)^{m+1})^{-1} \quad (15)$$

Значення радіальної жорсткості підшипника визначаються із залежності (7) через абсолютну деформацію найбільш навантаженого ролика:

$$\delta_{r\max} = K_n^\circ Q_{\max}^{\frac{1}{m}} \quad (16)$$

Тоді, беручи до уваги (11) або (14), вираз (16) набуває вигляду:

$$\delta_{r\max} = K_F^\circ F_r^{\frac{1}{m}} \quad (17)$$

де  $K_F^\circ = \lambda^{\frac{1}{m}} K_n^\circ$  – характеристика жорсткості підшипника в цілому.

Для моделей з табл. 1, в табл. 4 з урахуванням (15) наведені значення характеристики жорсткості  $K_F^\circ$  для підшипника.

Таблиця 4. Характеристики жорсткості  $K_F^\circ$

Модель	Палмгрен, Харріс [1,3]	Брандлейн та ін. [13]	Хуперт [14]	Ло Цзивей і Тайнуй [15]	Наша робота
$K_F^\circ, 10^5 \frac{í}{íí^{\frac{1}{m}}}$	0,747	0,838	1,11	0,898	0,667

Залежність (17) дозволяє розрахувати радіальні жорсткості підшипника [17]:

– «сікуча» жорсткість:

$$C_r = (K_F^\circ)^{-1} F_r^{\frac{m-1}{m}}, \quad (18)$$

– «дотична» жорсткість:

$$C_r^* = m(K_F^\circ)^{-1} F_r^{\frac{m-1}{m}}. \quad (19)$$

Для оцінки ефективності запропонованої моделі було проведено порівняння жорсткостей підшипника, представленого в таблиці 2, отриманих з відомих моделей, з розрахунковими даними з [19].

На рисунку 2 представлені залежності радіальних «секущих» жорсткостей (в Н/мм) роликового підшипника для відомих з літератури моделей і запропонованої в даній роботі моделі.

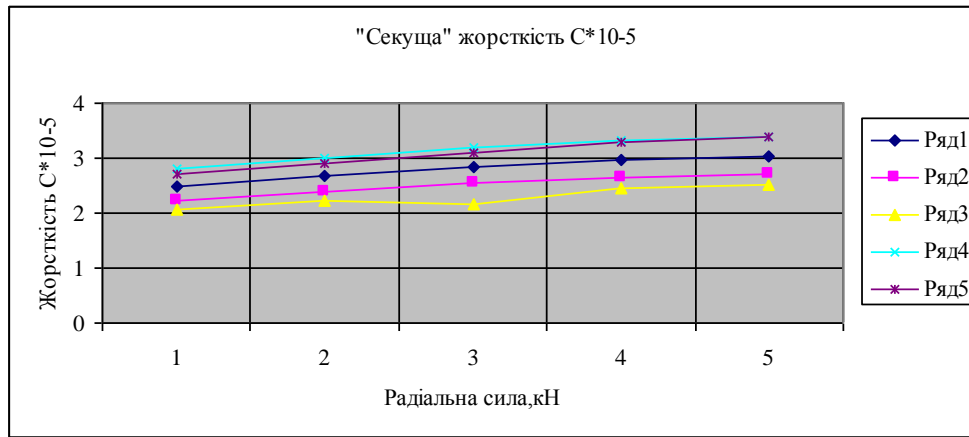


Рис.2 — Радіальна жорсткість підшипника.

Тут позначено: Ряд 1 – модель Палмгрена-Харріса [1,3], Ряд 2 – модель Брандліяна та ін. [13], Ряд 3 – модель Ло Цзівея і Тайнуя [15], Ряд 4 – модель цієї роботи, Ряд 5 – розрахунок підшипника "в цілому" методом скінченних елементів [19].

Аналіз результатів, представлених на рис.2, показує, що найкраще наближення до «точного» рішення дає модель Палмгрена-Харріса, чисельно-аналітичний підхід, запропонований в даній роботі, дає результати, які практично збігаються з розрахунком підшипника «в цілому» методом скінченних елементів.

Застосування запропонованої чисельно-аналітичної моделі дозволяє при незначних обчислювальних трудовитратах отримати сімейство кривих для роликового підшипника, що характеризують залежність його радіальної жорсткості, як від зовнішнього зусилля, так і від швидкості обертання, що забезпечить інженерний розрахунок жорсткостей з досить високим ступенем точності. Слід зазначити, що теплові ефекти і попередня затяжка, які можуть вплинути на розподіл напружень і жорсткість підшипника, не розглядалися.

У даній роботі приділено увагу ефективній моделі розрахунку радіальної жорсткості, але осьова і кутова жорсткості можуть бути вирішальними при вібраціях. В цьому випадку необхідно ефективне формування матриці жорсткості підшипника з 6 ступенями свободи, що вимагає окремого аналізу.

**Висновки.** Проведено аналіз запропонованого чисельно-аналітичного підходу для розрахунку радіальної жорсткості циліндричних роликових підшипників у порівнянні з відомими з літератури результатами. Запропонована чисельно-аналітична модель забезпечує підвищення точності за рахунок чисельного уточнення коефіцієнта жорсткості для контакту окремого елемента кочення з кільцями підшипника.

Перевагою запропонованого підходу є можливість автоматичного обліку технологічного зазору і швидкості обертання вала (відцентрової сили, що діє на кульку).

Запропонований в роботі підхід до розрахунку жорсткості циліндричних роликових підшипників може бути з достатнім ступенем точності використаний для практичних розрахунків жорсткості конічних роликових підшипників із заміною конічних роликів на циліндричні із середнім діаметром.

Трудовитрати і комп'ютерний час, необхідний для реалізації запропонованого чисельно-аналітичного підходу, помітно менше, ніж при використанні методу скінченних елементів для визначення жорсткості «в лоб» для кожного окремого підшипника, що робить дану модель ефективною інженерною моделлю розрахунку жорсткості роликових підшипників.

#### Список літератури

1. A. Palmgren, *Ball and Roller Bearing Engineering*, Philadelphia, Burbank, 1959
2. Jones, A. B. (1960), "A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings," *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82, pp 309-320.
3. Harris, T. A. (1966), *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley
4. Gupta, P. K. (2002), "On a Kinematic Hypothesis for Angular Contact Ball Bearings," *ASTM Symposium on Rolling Element Bearings*, Orlando, FL, April 22-24, 2002, pp 39-47.
5. J. M. de Mul, J. M. Vree, and D. A. Maas, "Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction—part I: general theory and application to ball bearings," *Journal of Tribology*, vol. 111, no. 1, pp. 142–148, 1989.
6. J. M. de Mul, J. M. Vree, and D. A. Maas, "Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction—part II: application to roller bearings and experimental verification," *Journal of Tribology*, vol. 111, no. 1, pp. 149–155, 1989.
7. V.-C. Tong and S.-W. Hong, "Characteristics of tapered roller bearing subjected to combined radial and moment loads," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing Green Technology*, vol. 1, no. 4, pp. 323–328, 2014.
8. V. Tong and S. Hong, "Study on the stiffness and fatigue life of tapered roller bearings with roller diameter error," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, vol. 231, no. 2, pp. 176–188, 2016.
9. T. C. Lim and R. Singh, "Vibration transmission through rolling element bearings, part I: bearing stiffness formulation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 139, no. 2, pp. 179–199, 1990
10. T. Lim and R. Singh, "Vibration transmission through rolling element bearings, part V: effect of distributed contact load on roller bearing stiffness matrix," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 169, no. 4, pp. 547–553, 1994.
11. Y. Guo and R. G. Parker, "Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 51, pp. 32–45, 2012.
12. H. Sjøvall, "Belastningsfördelningen inom kul-och rullager vid givna yttre radial-och axialbelastningar," *Teknisk Tidskrift. Mekanik*, 1933.
13. J. Brandlein, P. Eschmann, L. Hasbargen et al., *Ball and Roller Bearings: Theory, Design, and Application*, John Wiley & Sons, Ltd, 3rd edition, 1999

14. L. Houper, "A Uniform analytical approach for ball and roller bearings calculations," *Journal of Tribology*, vol. 119, no. 4, pp. 851–858, 1997
15. L. Jiwei and L. Tianyu, *Analysis, Calculation and Application of Rolling Bearing*, Machinery Industry Press, 2009
16. S. Kabus, M. R. Hansen, and O. O. Mouritsen, "A new quasistatic multi-degree of freedom tapered roller bearing model to accurately consider non-Hertzian contact pressures in timedomain simulations," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, vol. 228, no. 2, pp. 111–125, 2014.
17. В.Л.Хавін, Б.М.Киркач, С.Ю.Погорілов, С.Ю.Шергін, Ефективна модель розрахунку нелінійної жорсткості шарикопідшипників. //Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Технології в машинобудуванні, 2023.–№1(7).– сс.82–93.
18. Yuan Kanga, Ping-Chen Shen, Chih-Ching Huang, Shyh-Shyong Shyr, Yeon-Pun Chang "A Modification of the Jones-Harris Method for Deep-Groove Ball Bearings," *Tribology International*, Vol. 39, No. 11, 2006, pp. 1413-1420. <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2005.12.005>.
19. Alberto Gabrielli, Mattia Battarra, and Emiliano Mucchi A Critical Analysis of Finite-Element Modeling Procedures for Radial Bearing Stiffness Estimation Mathematical Problems in Engineering Volume 2021, Article ID 9955398, 18 pages <https://doi.org/10.1155/2021/9955398>
20. R. Stribeck, "Ball Bearings for Various Loads," *Transactions of the ASME*, Vol. 29, 1907, pp. 420-463
21. A new approach for the load calculation of the most loaded rolling element for the rolling bearing with internal radial clearance - The case study Radoslav Tomović .Original Article : March 19th, 2020 DOI: <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-17922/v1>

#### Bibliography (transliterated):

1. A. Palmgren, *Ball and Roller Bearing Engineering*, Philadelphia, Burban, 1959
2. Jones, A. B. (1960), "A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings," *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82, pp 309-320.
3. Harris, T. A. (1966), *Rolling Bearing Analysis*, John Wiley
4. Gupta, P. K. (2002), "On a Kinematic Hypothesis for Angular Contact Ball Bearings," *ASTM Symposium on Rolling Element Bearings*, Orlando, FL, April 22-24, 2002, pp 39-47.
5. J. M. de Mul, J. M. Vree, and D. A. Maas, "Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction—part I: general theory and application to ball bearings," *Journal of Tribology*, vol. 111, no. 1, pp. 142–148, 1989.
6. J. M. de Mul, J. M. Vree, and D. A. Maas, "Equilibrium and associated load distribution in ball and roller bearings loaded in five degrees of freedom while neglecting friction—part II: application to roller bearings and experimental verification," *Journal of Tribology*, vol. 111, no. 1, pp. 149–155, 1989.
7. V.-C. Tong and S.-W. Hong, "Characteristics of tapered roller bearing subjected to combined radial and moment loads," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing Green Technology*, vol. 1, no. 4, pp. 323–328, 2014.
8. V. Tong and S. Hong, "Study on the stiffness and fatigue life of tapered roller bearings with roller diameter error," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, vol. 231, no. 2, pp. 176–188, 2016.
9. T. C. Lim and R. Singh, "Vibration transmission through rolling element bearings, part I: bearing stiffness formulation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 139, no. 2, pp. 179–199, 1990
10. T. Lim and R. Singh, "Vibration transmission through rolling element bearings, part V: effect of distributed contact load on roller bearing stiffness matrix," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 169, no. 4, pp. 547–553, 1994.
11. Y. Guo and R. G. Parker, "Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 51, pp. 32–45, 2012.
12. H. Sjøvall, "Belastningsfördelningen inom kul-och rullager vid givna yttre radial-och axialbelastningar," *Teknisk Tidskrift. Mekanik*, 1933.
13. J. Brandlein, P. Eschmann, L. Hasbargen et al., *Ball and Roller Bearings: Theory, Design, and Application*, John Wiley & Sons, Ltd, 3rd edition, 1999
14. L. Houper, "A Uniform analytical approach for ball and roller bearings calculations," *Journal of Tribology*, vol. 119, no. 4, pp. 851–858, 1997
15. L. Jiwei and L. Tianyu, *Analysis, Calculation and Application of Rolling Bearing*, Machinery Industry Press, 2009
16. S. Kabus, M. R. Hansen, and O. O. Mouritsen, "A new quasistatic multi-degree of freedom tapered roller bearing model to accurately consider non-Hertzian contact pressures in timedomain simulations," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, vol. 228, no. 2, pp. 111–125, 2014.
17. Khavin V., Kyrkach B., Pogorilov S., Sherhin S. An effective model for calculating the nonlinear rigidity of ball bearings. // Bulletin of the National Technical University «KHPI». Series: Techniques in a machine industry. 2023.–№1(7). – pp.82–93.
18. Yuan Kanga, Ping-Chen Shen, Chih-Ching Huang, Shyh-Shyong Shyr, Yeon-Pun Chang "A Modification of the Jones-Harris Method for Deep-Groove Ball Bearings," *Tribology International*, Vol. 39, No. 11, 2006, pp. 1413-1420. <http://dx.doi.org/10.1016/j.triboint.2005.12.005>.
19. Alberto Gabrielli, Mattia Battarra, and Emiliano Mucchi A Critical Analysis of Finite-Element Modeling Procedures for Radial Bearing Stiffness Estimation Mathematical Problems in Engineering Volume 2021, Article ID 9955398, 18 pages <https://doi.org/10.1155/2021/9955398>
20. R. Stribeck, "Ball Bearings for Various Loads," *Transactions of the ASME*, Vol. 29, 1907, pp. 420-463
21. A new approach for the load calculation of the most loaded rolling element for the rolling bearing with internal radial clearance - The case study Radoslav Tomović .Original Article : March 19th, 2020 DOI: <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-17922/v1>

Поступила (received) 15.02.2023

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Хавін Валерій Львович (Khavin Valerij)** – кандидат технічних наук, професор кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-78; e-mail: [Valerij.Havin@khpi.edu.ua](mailto:Valerij.Havin@khpi.edu.ua), ORCID: 0000-0002-4827-6474.

**Киркач Борис Миколайович (Kyrkach Borys)** – кандидат технічних наук, професор кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-62-33; e-mail: [Borys.Kyrkach@khpi.edu.ua](mailto:Borys.Kyrkach@khpi.edu.ua), ORCID: 0000-0003-4594-557X.

**Шергін Сергій Юрійович (Sherhin Sergij)** – старший викладач кафедри теоретичної механіки та опору матеріалів Навчально-наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-78; e-mail: [Serhii.Sherhin@khpi.edu.ua](mailto:Serhii.Sherhin@khpi.edu.ua), ORCID: 0009-0000-3449-2064.